Целочисленные посл-сти. Добавка (Решения)

1. Найдите все функции $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, удовлетворяющие следующим условиям:
1) $f(2) = 2$;
2) $f(mn) = f(m)f(n)$ для всех $m, n \in \mathbb{N}$;
3) $f(n+1) > f(n)$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Ответ: $f(n) = n$.

Решение 1. Сразу заметим, что $f(1) = 1$, так как $f(1) = f(1^2) = f^2(1)$. Далее, по условию $f(2) = 2$, а значит, $f(2^k) = 2^k$ при любом натуральном k.

Теперь посмотрим на натуральные числа между 2^k и 2^{k+1}. Значения f от этих чисел идут в порядке возрастания и зажаты между 2^k и 2^{k+1}. Значит, $f(n) = n$ для всех $2^k \leqslant n \leqslant 2^{k+1}$. Это работает для всех k, а значит, $f(n) = n$ для всех n.

Наконец, убеждаемся, что функция $f(n) = n$ удовлетворяет условию задачи.

Решение 2. Как и в первом решении, сразу получаем $f(1) = 1$. По условию функция возрастает f и $f(2) = 2$, поэтому $f(n) \geqslant n \ \forall n \geqslant 2$.

Допустим, что $f(a) > a$ для некоторого a. Обозначим $f(a) = b$. Из условия $f(mn) = f(m)f(n)$ получаем $f(a^x) = b^x$, $f(2^y) = 2^y \ \forall x, y \in \mathbb{N}$. Нам достаточно доказать существование таких $x, y \in \mathbb{N}$, что $a^x < 2^y$, но $b^x > 2^y$ (тогда получим противоречие с монотонностью функции f). Эти неравенства эквиваленты неравенствам $x \ln a < y \ln 2$ и $x \ln b > y \ln 2$. Возьмём такое x, что $x \ln b - x \ln a > \ln 2$. Тогда найдётся такой $y \in \mathbb{N}$, что $y \ln 2 \in (x \ln a, x \ln b)$: прыгая с шагом $\ln 2$, мы не перепрыгнем отрезок длины больше $\ln 2$. Это ровно то, что нужно было для противоречия. Таким образом, $f(n) = n$ при всех n.

Наконец, убеждаемся, что функция $f(n) = n$ удовлетворяет условию задачи.

2. В последовательности натуральных чисел $\{a_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, каждое натуральное число встречается хотя бы один раз, и для любых различных n и m выполнено неравенство

$$\frac{1}{1998} < \frac{|a_n - a_m|}{|n - m|} < 1998.$$

Докажите, что тогда $|a_n - n| < 2000000$ для всех натуральных n.

Решение. Из условия следует, что никакие два члена последовательности a_n не могут быть равны. А так как все натуральные числа встречаются в a_n, то эта последовательность задаёт биекцию из $\mathbb{N}$ в себя.

На координатной плоскости отметим все точки вида (n, a_n) – они образуют *график* нашей последовательности. На каждой вертикальной и на каждой горизонтальной целочисленной прямой лежит ровно одна точка графика. Условие задачи нам говорит, что для любых двух точек графика соединяющий их отрезок имеет наклон, по модулю больший $1/1998$ и меньший 1998.

Заметим, все условия задачи сохраняются при отражении картинки относительно прямой $y = x$. Поэтому нам достаточно доказать, что для всех n верно $a_n - n < 2000000$. (Тогда $a_n - n > -2000000$ будет получаться из отражённой картинки).

Допустим, что $a_n - n \geqslant 2000000$ при некотором n. Назовём *пропастью* множество целочисленных точек, у которых абсциссы не меньше $n + 2000000$, а ординаты отличаются от a_n не более, чем на 1000. Ни одна из точке пропасти не принадлежит графику, так как отрезок, соединяющий точку (n, a_n) с точкой пропасти, имеет наклон меньший по модулю, чем 1/1998. Но тогда ни одна точка, лежащая под пропастью, также не принадлежит графику! (Иначе найдутся две точки по разные стороны от пропасти и с абсциссами, отличающимися на 1; отрезок, их соединяющий, имеет слишком большой наклон.) Таким образом, наша последовательность не может принимать значения от 1 до $a_n + 1000$ вне отрезка $[1, n + 2000000]$. Но $a_n + 1000 \geqslant n + 2001000 > n + 2000000$. Значит, не все эти значения встречаются в последовательности. Противоречие.

3. Последовательность натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots$ задаётся следующим образом: $a_1 = 1$, а если $n \geqslant 2$, то a_n – это наименьшее натуральное число, не встречающееся среди чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ и такое, что $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ делится на n. Докажите, что $a_{a_n} = n$ при всех n.

Решение. Научимся по-другому описывать a_n. Для этого разобьём все натуральные числа, кроме единицы, на пары. Единица будет в паре сама с собой (пара номер 0). Пара номер 1 – это $(2, 3)$, пара номер 2 – это $(4, 6)$. В обшем случае пара номер n состоит из наименьшего числа f_n, не встречающегося в парах с меньшим номером, и числа $g_n = f_n + n$. Пусть последовательность b_n переставляет числа в парах: $b_{f_n} = g_n$, $b_{g_n} = f_n$. Нам достаточно доказать, что $a_n = b_n$.

Лемма 1. $b_1 + b_2 + \ldots + b_n$ делится на n.

Доказательство. Назовём пару (f, g) *хорошей*, если $f \leqslant n < g$. Из каждой хорошей пары в сумму $b_1 + b_2 + \ldots + b_n$ войдёт большее число, но не войдёт меньшее; а разность между большим числом и меньшим – это номер пары. Из остальных пар в эту сумму либо войдут оба числа (если оба не больше n), либо не войдёт ни одного числа (если оба числа больше n). Значит, сумма $b_1 + b_2 + \ldots + b_n$ равна сумме всех чисел от 1 до n плюс сумма номеров хороших пар.

Пусть a – наименьший номер хорошей пары, а b – наибольший. Среди чисел от 1 до n есть ровно одно в паре с самим собой (единица), есть $2(a-1)$ чисел в паре друг с другом и наконец, есть $b-a+1$ число, пара которого больше, чем n. Таким образом, $n = 1+2(a-1) + b - a + 1 = a + b$. Итого

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_n = 1 + 2 + \ldots + n + a + (a+1) + \ldots + b =$$
$$= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{(a+b)(b-a+1)}{2} = \frac{n(n+b-a+2)}{2} = n(b+1).$$

□

Лемма 2. (Можно пока эту лемму пропустить и вернуться к ней в самом конце решения.) Пусть (f, g) – одна из пар $(f < g)$. Тогда меньшее число k пары номер f будет больше, чем g.

Доказательство. Допустим, что $k < g$. Тогда в терминах и обозначениях леммы 1 пара (f, g) и пара номер f будут хорошими для $n = k$. Сумма номеров этих двух пар равна g, и $g < n$. Причём пара с номером k, очевидно, является наибольшей по номеру хорошей парой. Получаем противоречие с тем фактом, что n равно сумме наименьшего и наибольшего номеров хороших пар. □

Итак, мы знаем, что при всех n число b_n не встречается среди чисел $b_1, b_2, \dots, b_n$ и при этом $b_1 + b_2 + \dots + b_n$ делится на n. Чтобы доказать, что $a_n = b_n$, достаточно убедится, что b_n – это наименьшее число с такими свойствами. Если $b_n < n$, то это очевидно. Пусть $b_n > n$ (т.е. имеем пару (n, b_n), в которой b_n – большее число). Из построения пар видно, что числа в каждой паре различаются менее, чем в два раза. Значит, единственный «кандидат», меньший, чем b_n – это $b_n - n$. Тогда число m, стоящее в паре с $b_n - n$, будет меньше n (иначе противоречие по лемме 2). Так как m стоит в паре с $b_n - n$, то $b_m = b_n - n$. Таким образом, $b_n - n$ встречается среди чисел $b_1, b_2, \dots, b_n$. Значит, «кандидат» $b_n - n$ не подходит и число b_n – в самом деле наименьшее среди чисел с нужными свойствами. Конец решения.

Замечание. Догадаться определить последовательность b_n можно, если поглядеть пристально на первые несколько членов последовательности a_n. Действительно, если рассмотреть только такие n, что $a_n > n$, то разность $a_n - n$ каждый раз будет увеличиваться на 1:

n	1	**2**	3	**4**	**5**	6	**7**	8	**9**	**10**
a_n	1	**3**	2	**6**	**8**	4	**11**	5	**14**	**16**
$\sum_{i=1}^{n} a_i$	1	4	6	12	20	24	35	40	54	70