Целочисленные последовательности. Добавка (подсказки)

1. Найдите все функции $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, удовлетворяющие следующим условиям:
1) $f(2) = 2$;
2) $f(mn) = f(m)f(n)$ для всех $m, n \in \mathbb{N}$;
3) $f(n+1) > f(n)$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Подсказка. Задача никаких нетривиальных идей не требует. Я её переоценил, вставляя в добавку.

Но всё же вот подсказка к более идейному решению. Допустим, что найдётся такое a, что $f(a) > a$. Тогда можно найти такие натуральные x, y, что $a^x < 2^y$, но $f^x(a) > 2^y$ с противоречием.

2. В последовательности натуральных чисел $\{a_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, каждое натуральное число встречается хотя бы один раз, и для любых различных n и m выполнено неравенство

$$\frac{1}{1998} < \frac{|a_n - a_m|}{|n - m|} < 1998.$$

Докажите, что тогда $|a_n - n| < 2000000$ для всех натуральных n.

Подсказка. Вам пригодится следующее наблюдение. Пусть в нашей последовательности имеется «пропасть» ширины хотя бы 1998 (т.е. при достаточно больших n числа a_n не могут лежать внутри некоторого фиксированного отрезка длины 1998). Тогда никакие члены последовательности не могут находиться «под» этой «пропастью».

В процессе придумывания решения сильно помогает картинка. Если на координатной плоскости отмечать точки (k, a_k), то неравенство из условия позволяет рисовать зоны в форме крестов, где точек нет. Когда-то кресты-пропасти становятся слишком жирными.

3. Последовательность натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots$ задаётся следующим образом: $a_1 = 1$, а если $n \geqslant 2$, то a_n – это наименьшее натуральное число, не встречающееся среди чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ и такое, что $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ делится на n. Докажите, что $a_{a_n} = n$ при всех n.

Подсказка. Научимся по-другому описывать a_n. Для этого разобьём все натуральные числа, кроме единицы, на пары. Единица будет в паре сама с собой (пара номер 0). Далее, пара номер n состоит из наименьшего числа f_n, не встречающегося в парах с меньшим номером, и числа $g_n = f_n + n$. Пусть последовательность b_n переставляет числа в парах: $b_{f_n} = g_n$, $b_{g_n} = f_n$. Докажите, что $a_n = b_n$.