Серия 40. Неравенства

1. Положительные числа x, y, z таковы, что $xy + yz + zx \geqslant x + y + z$. Докажите, что $x + y + z \geqslant 3$.
2. Докажите, что $3a^2 + 3b^2 + c^2 \geqslant 2(ab + bc + ca)$ для любых вещественных a, b, c.
3. Положительные числа a, b, c в сумме дают 3. Докажите, что
$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}} \leqslant \frac{3}{ab + bc + ca}.$$
4. Неотрицательные числа a, b, c связаны соотношением $(a + b)(b + c)(c + a) = 1$. Докажите неравенство $ab + bc + ca \leqslant \frac{3}{4}$.
5. Положительные числа a, b, c удовлетворяют $ab + bc + ca = 3$. Докажите, что
$$a^3 + b^3 + c^3 + 6abc \geqslant 9.$$
6. Произведение положительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ равно 1. Докажите
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n-1) + x_k} \leqslant 1.$$
7. Для положительных чисел a, b, c докажите неравенство
$$\left(\frac{2a}{b+c}\right)^{2/3} + \left(\frac{2b}{c+a}\right)^{2/3} + \left(\frac{2c}{a+b}\right)^{2/3} \geqslant 3.$$
8. Даны положительные числа a, b, c, сумма которых равна 1. Докажите, что
$$\sqrt{\frac{ab}{ab+c}} + \sqrt{\frac{bc}{bc+a}} + \sqrt{\frac{ca}{ca+b}} \leqslant \frac{3}{2}.$$