Серия 39. EGMO-2020

Сегодня вам предлагается порешать задачи с IX Европейской математической олимпиады для девочек. Она проходила 16 и 17 апреля в дистанционном формате. Порядок задач сохранён.

1. Целые положительные числа $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{3030}$ таковы, что

$$2a_{n+2} = a_{n+1} + 4a_n \quad \text{при всех } n = 0, 1, 2, \ldots, 3028.$$

Докажите, что хотя бы одно из чисел $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{3030}$ делится на 2^{2020}.

2. Найдите все наборы $(x_1, x_2, \ldots, x_{2020})$ неотрицательных вещественных чисел таких, что выполнены следующие три условия:

- $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_{2020}$;
- $x_{2020} \leqslant x_1 + 1$;
- существует перестановка $(y_1, y_2, \ldots, y_{2020})$ набора $(x_1, x_2, \ldots, x_{2020})$ такая, что

$$\sum_{i=1}^{2020} \big((x_i + 1)(y_i + 1)\big)^2 = 8 \sum_{i=1}^{2020} x_i^3.$$

3. Пусть $ABCDEF$ — выпуклый шестиугольник такой, что $\angle A = \angle C = \angle E$ и $\angle B = \angle D = \angle F$ и биссектрисы внутренних углов $\angle A$, $\angle C$, $\angle E$ пересекаются в одной точке. Докажите, что биссектрисы внутренних углов $\angle B$, $\angle D$, $\angle F$ тоже пересекаются в одной точке.

4. Перестановку целых чисел $1, 2, \ldots, m$ будем называть *свежей*, если не существует положительного целого $k < m$ такого, что первые k чисел в этой перестановке – это $1, 2, \ldots, k$ в некотором порядке. Пусть f_m — количество всех свежих перестановок чисел $1, 2, \ldots, m$.

Докажите, что $f_n \geqslant n \cdot f_{n-1}$ для всех $n \geqslant 3$.

5. Рассмотрим треугольник ABC, у которого $\angle BCA > 90^\circ$. Радиус окружности Γ, описанной около треугольника ABC, равен R. На отрезке AB нашлась точка P такая, что $PB = PC$, а длина отрезка PA равна R. Серединный перпендикуляр к отрезку PB пересекает окружность Γ в точках D и E.

Докажите, что точка P является центром вписанной окружности треугольника CDE.

6. Пусть $m > 1$ — целое число. Последовательность $a_1, a_2, a_3, \ldots$ задана равенствами $a_1 = a_2 = 1$, $a_3 = 4$, а для всех $n \geqslant 4$:

$$a_n = m(a_{n-1} + a_{n-2}) - a_{n-3}.$$

Найдите все целые m такие, что каждый член последовательности является точным квадратом.