Серия 38. Теоретико-числовые свойства биномиальных коэффициентов.

Считаем, что $C_n^k = 0$ при $n < k$.

Через $\nu_p(n)$ будем обозначать степень вхождения простого множителя p в число n.

Напомним *формулу Лежандра*: $\nu_p(n!) = \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{n}{p^i}\right]$.

1. Докажите, что $\nu_p(C_{n+m}^m)$ равна числу переносов разряда при сложении чисел m и n в столбик в p-ичной системе счисления.

2. Пусть n — натуральное нечётное число. Докажите, что среди чисел

$$\{C_n^1, C_n^2, \ldots, C_n^{\frac{n-1}{2}}\}$$

нечётное число нечётных чисел.

3. Пусть p — простое. Докажите, что для любых натуральных n и k число $C_{p^n}^k$ делится на p.

4. Докажите, что при $0 \leqslant k \leqslant 2^n - 1$ число $C_{2^n-1}^k$ нечётно.

5. Пусть n — натуральное число. Докажите, что количество чисел $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$, таких, что C_n^k — нечётное, является степенью двойки.

6. Пусть m, n — натуральные числа, $m \leqslant n$. Докажите, что m является делителем числа

$$n(C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \ldots + (-1)^{m-1} C_n^{m-1}).$$

7. *Биномиальная система счисления.* Пусть k — некоторое натуральное число. Докажите, что любое натуральное число n можно единственным образом представить в виде:

$$n = C_{a_1}^1 + C_{a_2}^2 + \ldots + C_{a_k}^k,$$

где $0 \leqslant a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_k$.

8. Докажите, что для любого натурального числа $n \geqslant 3$ верно неравенство

$$\text{НОК}(1, 2, \ldots, n) > 2^{n-1}.$$

9. Даны натуральные числа $a < b < n$. Докажите, что числа C_n^a и C_n^b не взаимно просты.