Серия 37. Функциональные уравнения.

Напоминание: Пусть функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такова, что $f(x+y) = f(x) + f(y)$, тогда либо f линейна, либо её график всюду плотен на всей плоскости (т.е. в любом круге на плоскости есть точки графика).

Во всех задачах надо найти все функции, удовлетворяющие данным условиям при всех допустимых значениях переменных.

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — непрерывная, $f(2x) = f(x)$.

2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — строго возрастающая, $f(x + f(y)) = f(x+y) + 1$.

3. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(n+1) > f(f(n))$.

4. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — непрерывная, $f^2(x)f^2(y) = f(x-y)f(x+y)$.

5. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(1) = 1$, $f(x+y) = f(x) + f(y)$ и $f(x) \cdot f(\frac{1}{x}) = 1$.

6. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x^2 + y + f(y)) = 2y + f^2(x)$.

7. $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $f(x^2 + y) = f^2(x) + \dfrac{f(xy)}{f(x)}$, (для $y \neq -x^2$).