Серия 36. Комплексные числа — 2.

1. Пусть многочлен $P(x^n)$ делится на $x-1$. Докажите, что $P(x^n)$ делится на x^n-1.

2. Пусть $M \subset \mathbb{C}\backslash\{0\}$ – множество, удовлетворяющее свойству: если $x, y \in M$, то $x/y \in M$. Известно, что M состоит из n элементов. Найдите M.

3. Докажите, что модуль комплексного числа $z = \frac{2+i}{2-i}$ равен 1, но это число не является корнем степени n из единицы ни при каком натуральном n.

4. Пусть P – многочлен чётной степени с комплексными коэффициентами. Известно, что все корни P имеют модуль 1, причём P не имеет вещественных корней. Докажите, что $P(1) \in \mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда $P(-1) \in \mathbb{R}$.

5. Можно ли так отметить 2020 точек на единичной окружности, чтобы все попарные расстояния между ними были рациональны?

6. Пусть $z_1, z_2, ..., z_n$ – комплексные числа, такие что $|z_i - 1| \leqslant r$ для некоторого $r \in (0,1)$. Докажите, что

$$\left|\sum_{i=1}^{n} z_i\right| \cdot \left|\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{z_i}\right| \geqslant n^2(1-r^2).$$