

Серия 35. Идеиные задачи

1. По шоссе в одном направлении со скоростью 60 км/ч едут два автомобилиста, расстояние между которыми в начальный момент времени больше двух километров. Вдоль шоссе расположены несколько светофоров. На каждом светофоре поочередно горит 1 минуту зеленый свет и 1 минуту красный (не обязательно синхронно с другими светофорами). Автомобилист не может проехать на красный свет. Докажите, что отстающий автомобилист никогда не догонит впереди идущего.
2. Каждая деталь конструктора «Юный паяльщик» — это скобка в виде буквы «П» состоящая из трех единичных отрезков. Можно ли из деталей этого конструктора спаять полный проволочный каркас куба $2 \times 2 \times 2$, разбитого на кубики $1 \times 1 \times 1$? (Каркас состоит из 27 точек, соединенных единичными отрезками; любые две соседние точки должны быть соединены ровно одним проволочным отрезком.)
3. В вершинах правильного 1001-угольника стоят нули. За один ход разрешается выписать на доску целое число $1 \leq k \leq 500$, выбрать любую вершину многоугольника, прибавить к числу в ней 2, а из чисел, стоящих в вершинах, отстоящих от выбранной по часовой и против часовой стрелки на k , вычесть по 1. Через несколько ходов в вершинах вновь оказались нули. Докажите, что сумма квадратов выписанных на доску чисел кратна 1001.
4. На бесконечной белой клетчатой плоскости изначально n клеток были покрашены в чёрный цвет. Каждую минуту каждая клетка K перекрашивается в тот цвет, который преобладает в её *уголке* из трёх клеток: сама клетка K и её соседи по стороне сверху и слева. Докажите, что через n минут все клетки станут белыми.