Серия 34. Используем комплексные числа

Для решения задач этого листка нужно знать: как выполнять арифметические операции с комплексными числами; основные свойства комплексного сопряжения; тригонометрическую форму записи комплексного числа и формулу Муавра; сколько существует комплексных корней степени n из 1 и как они расположены на комплексной плоскости. В случае, если у вас есть серьёзные пробелы по этим вопросам, рекомендуем порешать листик http://math.mosolymp.ru/upload/files/2020/khamovniki/10/3/2019-10-07-povtorenie-complex.pdf

В некоторых задачах вам понадобится **основная теорема алгебры**: любой непостоянный многочлен с комплексными коэффициентами имеет комплексный корень. Следствие: любой многочлен степени n с комплексными коэффициентами имеет ровно n комплексных корней с учётом кратности.

1. При каких n многочлен $(x+1)^n - x^n - 1$ делится на x^2+x+1?

2. **(a)** Пусть f – многочлен с действительными коэффициентами, и пусть $z \in \mathbb{C}$. Докажите, что если $f(z)=0$, то $f(\overline{z})=0$.
(b) Докажите, что любой многочлен с действительными коэффициентами можно разложить в произведение многочленов с действительными коэффициентами степени не выше 2.

3. Докажите следующее утверждение. (Отметим, что оно полезно в задаче 7.) Пусть r – нечётное число и ε – примитивный корень из единицы степени r (т.е. $\varepsilon^r = 1$, $\varepsilon^k \neq 1$ при $1 \leqslant k < r$). Тогда

$$(1+\varepsilon)(1+\varepsilon^2)\dots(1+\varepsilon^r) = 2.$$

4. Пусть $P_k(x) = x^{k-1} + x^{k-2} + \ldots + x + 1$, $Q_n(x) = P_1(x)P_2(x)\dots P_n(x)$. Докажите, что многочлен $Q_{n+m}(x)$ делится на многочлен $Q_n(x)Q_m(x)$.

5. Многочлен $P(x)$ с действительными коэффициентами принимает только положительные значения. Докажите, что найдутся многочлены $Q(x)$ и $R(x)$ с действительными коэффициентами такие, что $P(x) = Q^2(x) + R^2(x)$.

6. Вершины правильного n-угольника покрашены несколькими красками (каждая одной краской) так, что точки одного и того же цвета служат вершинами правильного многоугольника. Докажите, что среди этих многоугольников найдутся два равных.
Указание. Рассмотрим вершины правильного многоугольника как комплексные корни из 1 степени n. Теперь переформулируйте задачу на языке многочленов. Для этого множеству точек данного цвета сопоставьте многочлен со старшим коэффициентом 1, множеством корней которого служит это множество точек.

7. Цель – решить по пунктам следующую задачу.

В одной из вершин правильного n-угольника записана единица, а в остальных – нули. Хулиган Миша одновременно прибавил к числу в каждой вершине его соседа по часовой стрелке; затем он прибавил к числу в каждой вершине число, стоящее от него через две вершины по часовой стрелке и т.д.; наконец, он прибавил к числу в каждой вершине его соседа против часовой стрелки. После этих операций $n-1$ из записанных чисел оказались равны. Чему могло быть равно число n?

(a) Докажите, что если после всех операций все n чисел оказались равны, то n – это степень двойки.

(b) Проделаем с числами дополнительно ещё одну операцию: прибавим к каждому числу его самого. От этого количество равных чисел не изменится. Занумеруем вершины многоугольника числами от 0 до $n-1$. Сопоставим числам в вершинах многоугольника многочлен $f(t) = a_{n-1}t^{n-1} + a_{n-2}t^{n-2} + \ldots a_1 t + a_0$, где a_k – число, стоящее в вершине с номером k. Докажите, что многочлен, соответствующий финальной расстановке, сравним с многочленом $P(t) := (1+t)(1+t^2)(1+t^3)\dots(1+t^n)$ по модулю $R(t) := t^{n-1} + \ldots + t + 1$.

(c) Пусть n чётно. Докажите, что если в финальной расстановке $n-1$ чисел равны, то в ней все n чисел равны. Тем самым из пункта a) получаем, что если чётное n нам подходит, то n является степенью двойки.

(d) Пусть n – степень двойки. Докажите, что тогда все числа в финальной расстановке равны. Тем самым, все степени двойки нам подходят.

(e) Пусть n – простое число. Докажите, что оно подходит.

(f) Наконец, докажите, что нечётные составные n не подходят.