[ЦПМ, кружок по математике, 10 класс] Афризонов Д., Юргин Г.

[*2019–2020*] группы: 10-1, 10-2 *12 марта 2020 г.*

Серия 30. Хардкорная алгебраическая добавка

1. Существует ли такая бесконечная последовательность ненулевых цифр $a_1, a_2, \ldots$ и такое натуральное N, что при всех натуральных $k \geqslant N$ число $\overline{a_k a_{k-1} \ldots a_1}$ является точным квадратом?

2. Дано натуральное $k > 2$. Аня и Боря играют в следующую игру. Изначально на доске написано число $n \geqslant k$. Игроки ходят по очереди (Аня начинает первой). За ход, если на доске написано число m, игрок стирает его и заменяет на число m' такое, что $k \leqslant m' < m$ и НОД $(m, m') = 1$. Тот, кто не может сделать ход, проигрывает.

   Назовём число $n \geqslant k$ *хорошим*, если в игре, начинающейся с числа n, у Ани есть выигрышная стратегия. Пусть числа $n, n' > k$ таковы, что любое простое p, делящее одно из них, делит и другое. Докажите, что либо оба числа n, n' хорошие, либо оба нехорошие.

3. В бесконечной последовательности (x_n) первый член x_1 – рациональное число, большее 1, и $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{[x_n]}$ при всех натуральных n. Докажите, что в этой последовательности есть целое число.

[ЦПМ, кружок по математике, 10 класс] Афризонов Д., Юргин Г.

[*2019–2020*] группы: 10-1, 10-2 *12 марта 2020 г.*

Серия 30. Хардкорная алгебраическая добавка

1. Существует ли такая бесконечная последовательность ненулевых цифр $a_1, a_2, \ldots$ и такое натуральное N, что при всех натуральных $k \geqslant N$ число $\overline{a_k a_{k-1} \ldots a_1}$ является точным квадратом?

2. Дано натуральное $k > 2$. Аня и Боря играют в следующую игру. Изначально на доске написано число $n \geqslant k$. Игроки ходят по очереди (Аня начинает первой). За ход, если на доске написано число m, игрок стирает его и заменяет на число m' такое, что $k \leqslant m' < m$ и НОД $(m, m') = 1$. Тот, кто не может сделать ход, проигрывает.

   Назовём число $n \geqslant k$ *хорошим*, если в игре, начинающейся с числа n, у Ани есть выигрышная стратегия. Пусть числа $n, n' > k$ таковы, что любое простое p, делящее одно из них, делит и другое. Докажите, что либо оба числа n, n' хорошие, либо оба нехорошие.

3. В бесконечной последовательности (x_n) первый член x_1 – рациональное число, большее 1, и $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{[x_n]}$ при всех натуральных n. Докажите, что в этой последовательности есть целое число.

[ЦПМ, кружок по математике, 10 класс] Афризонов Д., Юргин Г.

[*2019–2020*] группы: 10-1, 10-2 *12 марта 2020 г.*

Серия 30. Хардкорная алгебраическая добавка

1. Существует ли такая бесконечная последовательность ненулевых цифр $a_1, a_2, \ldots$ и такое натуральное N, что при всех натуральных $k \geqslant N$ число $\overline{a_k a_{k-1} \ldots a_1}$ является точным квадратом?

2. Дано натуральное $k > 2$. Аня и Боря играют в следующую игру. Изначально на доске написано число $n \geqslant k$. Игроки ходят по очереди (Аня начинает первой). За ход, если на доске написано число m, игрок стирает его и заменяет на число m' такое, что $k \leqslant m' < m$ и НОД $(m, m') = 1$. Тот, кто не может сделать ход, проигрывает.

   Назовём число $n \geqslant k$ *хорошим*, если в игре, начинающейся с числа n, у Ани есть выигрышная стратегия. Пусть числа $n, n' > k$ таковы, что любое простое p, делящее одно из них, делит и другое. Докажите, что либо оба числа n, n' хорошие, либо оба нехорошие.

3. В бесконечной последовательности (x_n) первый член x_1 – рациональное число, большее 1, и $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{[x_n]}$ при всех натуральных n. Докажите, что в этой последовательности есть целое число.

[ЦПМ, кружок по математике, 10 класс] Афризонов Д., Юргин Г.

[*2019–2020*] группы: 10-1, 10-2 *12 марта 2020 г.*

Серия 30. Хардкорная алгебраическая добавка

1. Существует ли такая бесконечная последовательность ненулевых цифр $a_1, a_2, \ldots$ и такое натуральное N, что при всех натуральных $k \geqslant N$ число $\overline{a_k a_{k-1} \ldots a_1}$ является точным квадратом?

2. Дано натуральное $k > 2$. Аня и Боря играют в следующую игру. Изначально на доске написано число $n \geqslant k$. Игроки ходят по очереди (Аня начинает первой). За ход, если на доске написано число m, игрок стирает его и заменяет на число m' такое, что $k \leqslant m' < m$ и НОД $(m, m') = 1$. Тот, кто не может сделать ход, проигрывает.

   Назовём число $n \geqslant k$ *хорошим*, если в игре, начинающейся с числа n, у Ани есть выигрышная стратегия. Пусть числа $n, n' > k$ таковы, что любое простое p, делящее одно из них, делит и другое. Докажите, что либо оба числа n, n' хорошие, либо оба нехорошие.

3. В бесконечной последовательности (x_n) первый член x_1 – рациональное число, большее 1, и $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{[x_n]}$ при всех натуральных n. Докажите, что в этой последовательности есть целое число.