Серия 28. Постулат Бертрана

Пусть $\pi(x)$ — количество простых чисел, не превосходящих x. Пусть R_n — произведение всех простых чисел от $n+1$ до $2n$ (если таковых нет, произведение считаем равным единице).

1. Докажите, что $0 \leqslant [2x] - 2[x] \leqslant 1$.

2. Докажите, что если $p > 2n$, то C_{2n}^n не делится на p.

3. Докажите, что если $n < p < 2n$, то p входит в C_{2n}^n ровно в первой степени.

4. Докажите, что если $\frac{2n}{3} < p \leqslant n$ и $p > 2$, то C_{2n}^n не делится на p.

5. Докажите, что если $p > \sqrt{2n}$, то p входит в C_{2n}^n не более чем в первой степени.

6. Докажите, что если C_{2n}^n делится на p^k, то $p^k \leqslant 2n$.

7. Докажите, что $C_{2n}^n < 4^n$ при любом натуральном n.

8. Докажите, что $C_{2n}^n \geqslant \frac{4^n}{2\sqrt{n}}$ при любом натуральном n.

9. Докажите, что C_{2n}^n делится на произведение всех простых p, для которых $n < p < 2n$.

10. Докажите, что произведение всех простых чисел, не превосходящих n, меньше 4^n.

11. Докажите, что $R_n > \frac{4^{n/3}}{2\sqrt{n}(2n)^{\pi(\sqrt{2n})}}$ при любом натуральном n.

12. Докажите, что $\pi(x) \leqslant \frac{x}{2}$ при $x \geqslant 8$.

13. Докажите, что $R_n > \frac{4^{n/3}}{2\sqrt{n}(2n)^{\sqrt{n/2}}}$ при натуральных $n \geqslant 32$.

14. Докажите, что $2^x > 6x$ при вещественных $x \geqslant 6$.

15. Докажите, что $(2n)^{\sqrt{n/2}} < 2^{n/3}$ при натуральных $n \geqslant 648$.

16. Докажите, что $R_n > 1$ при натуральных $n \geqslant 648$.

17. Докажите, что при натуральных $n > 5$ между n и $2n$ содержится хотя бы одно простое число.

18. Докажите, что при натуральных $n > 5$ между n и $2n$ содержится хотя бы два простых числа.

19. Докажите, что для любого натурального k между n и $2n$ содержится хотя бы k простых чисел, если только n достаточно велико.

[ЦПМ, кружок по математике, 10 класс] Афризонов Д., Юргин Г.
[2019–2020] группы: 10-1, 10-2 *5 марта 2020 г.*

Серия 28. Постулат Бертрана

Пусть $\pi(x)$ — количество простых чисел, не превосходящих x. Пусть R_n — произведение всех простых чисел от $n+1$ до $2n$ (если таковых нет, произведение считаем равным единице).

1. Докажите, что $0 \leqslant [2x] - 2[x] \leqslant 1$.

2. Докажите, что если $p > 2n$, то C_{2n}^n не делится на p.

3. Докажите, что если $n < p < 2n$, то p входит в C_{2n}^n ровно в первой степени.

4. Докажите, что если $\frac{2n}{3} < p \leqslant n$ и $p > 2$, то C_{2n}^n не делится на p.

5. Докажите, что если $p > \sqrt{2n}$, то p входит в C_{2n}^n не более чем в первой степени.

6. Докажите, что если C_{2n}^n делится на p^k, то $p^k \leqslant 2n$.

7. Докажите, что $C_{2n}^n < 4^n$ при любом натуральном n.

8. Докажите, что $C_{2n}^n \geqslant \frac{4^n}{2\sqrt{n}}$ при любом натуральном n.

9. Докажите, что C_{2n}^n делится на произведение всех простых p, для которых $n < p < 2n$.

10. Докажите, что произведение всех простых чисел, не превосходящих n, меньше 4^n.

11. Докажите, что $R_n > \frac{4^{n/3}}{2\sqrt{n}(2n)^{\pi(\sqrt{2n})}}$ при любом натуральном n.

12. Докажите, что $\pi(x) \leqslant \frac{x}{2}$ при $x \geqslant 8$.

13. Докажите, что $R_n > \frac{4^{n/3}}{2\sqrt{n}(2n)^{\sqrt{n/2}}}$ при натуральных $n \geqslant 32$.

14. Докажите, что $2^x > 6x$ при вещественных $x \geqslant 6$.

15. Докажите, что $(2n)^{\sqrt{n/2}} < 2^{n/3}$ при натуральных $n \geqslant 648$.

16. Докажите, что $R_n > 1$ при натуральных $n \geqslant 648$.

17. Докажите, что при натуральных $n > 5$ между n и $2n$ содержится хотя бы одно простое число.

18. Докажите, что при натуральных $n > 5$ между n и $2n$ содержится хотя бы два простых числа.

19. Докажите, что для любого натурального k между n и $2n$ содержится хотя бы k простых чисел, если только n достаточно велико.