Серия 26. Неравенство Йенсена

Функция $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$, определённая на конечном или бесконечном интервале (a,b), называется *выпуклой вниз*, если любая хорда её графика лежит выше самого графика. Алгебраически это условие записывается неравенством $\lambda f(x) + \mu f(y) \geqslant f(\lambda x + \mu y)$ при всех $x, y \in (a,b)$, $\lambda, \mu \in [0,1]$, $\lambda + \mu = 1$.

Неравенство Йенсена. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — неотрицательные вещественные числа, причём $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = 1$. Тогда для любой выпуклой вниз функции $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ и для любых $x_1, x_2, \ldots, x_n \in (a,b)$ имеет место неравенство:

$$\lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \ldots + \lambda_n f(x_n) \geqslant f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n).$$

1. Какое из чисел больше: $\log_{99} 100$ или $\log_{100} 101$?

2. Про положительные числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ известно, что $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1$. Докажите неравенство

$$\frac{x_1}{\sqrt{1-x_1}} + \frac{x_2}{\sqrt{1-x_2}} + \ldots + \frac{x_n}{\sqrt{1-x_n}} \geqslant \sqrt{\frac{n}{n-1}}.$$

3. Для точки S внутри треугольника ABC обозначим через x, y, z расстояния до прямых BC, CA, AB соответственно. Определите точку S, в которой достигается минимум величины $BC/x + CA/y + AB/z$.

4. Пусть x, y, z — положительные числа, причём $x + y + z = 1$. Докажите, что

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right)\left(1 + \frac{1}{z}\right) \geqslant 64.$$

5. Положительные числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в произведении дают 1. Докажите

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n-1) + x_k} \leqslant 1.$$

6. Для любых положительных чисел α, β, γ, δ докажите неравенство

$$\left(\frac{\alpha+\beta}{\gamma+\delta}\right)^{\alpha+\beta} \leqslant \left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^{\alpha} \left(\frac{\beta}{\delta}\right)^{\beta}.$$

7. Докажите, что существует такое натуральное число N, что для любой последовательности вещественных чисел $1 = x_0 \geqslant x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_N > 0$ выполнено неравенство

$$\frac{x_0^2}{x_1} + \frac{x_1^2}{x_2} + \ldots + \frac{x_{N-1}^2}{x_N} \geqslant 3.999.$$