Серия 25. Обратные к простым

Некоторые теоретические сведения про ряды

Ряд $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ называется *сходящимся*, если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$, где $S_n = a_1 + \ldots + a_n$ – *частичные суммы* ряда.

Будем называть ряд *неотрицательным*, если все его члены неотрицательны.

Утверждение. а) Если ряд $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ сходится, то $|a_n| \to 0$ при $n \to \infty$.
б) Сходимость любого ряда не поменяется от выкидывания из этого ряда конечного числа членов.
в) Неотрицательный ряд $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ сходится тогда и только тогда, когда последовательность S_n частичных сумм ограничена.
г) Пусть $c > 0$. Тогда если для неотрицательных рядов $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ и $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ при всех i верно $ca_i \geqslant b_i$, то из сходимости первого ряда следует сходимость второго, а из расходимости второго – расходимость первого.

Произведение $\prod_{i=1}^{\infty} u_i$ называется *сходящимся*, если существует **и не равен нулю** предел $\lim\limits_{n\to\infty} p_n$, где $p_n = u_1 u_2 \ldots u_n$ – частичные произведения.

Теорема. Пусть $a_1, a_2, \ldots$ – числа, большие -1, причём все одного знака. Тогда произведение $\prod_{i=1}^{\infty}(1+a_i)$ сходится тогда и только тогда, когда ряд $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ сходится.

Доказательство. Произведение $\prod_{i=1}^{\infty}(1+a_i)$ сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \ln(1+a_i)$. Если ряд $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ или ряд из логарифмов сходится, то $|a_n| \to 0$ при $n \to \infty$. Значит, при достаточно больших n справедливы оценки $1/2|a_n| < |\ln(1+a_n)| < 2|a_n|$. Поэтому ряд $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \ln(1+a_i)$. □

Обозначим n-е по счёту простое число через p_n.

1. **(a)** Докажите, что
$$\prod_{i=1}^{N}\left(1+\frac{1}{p_i}+\frac{1}{p_i^2}+\ldots+\frac{1}{p_i^N}\right) > 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{N}$$
(b) Докажите расходимость произведения $\prod\limits_{i=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{p_i-1}\right)$.
(c) Докажите, что сумма обратных к простым числам расходится.
Подсказка: используйте теорему и пункт г) утверждения выше.

2. Вася утверждает, что при достаточно больших n выполнено $p_{n+1} > (1+10^{-6})p_n$. Докажите, что Вася не прав.

3. Назовём число *избыточным*, если оно меньше суммы своих делителей, отличных от него самого. Существует ли миллион подряд идущих избыточных чисел?

4. Сумма всех делителей числа n обозначается через $\sigma(n)$. Дано вещественное число $x > 1$. Докажите, что найдётся такое натуральное n, что $x < \sigma(n)/n < x + 10^{-6}$.

5. Дан правильный n-угольник. Любое подмножество его вершин назовём *шаблоном*. Назовём шаблон *маленьким*, если в нём менее $1/100$ от всех вершин. Можно ли про каком-нибудь n найти маленький шаблон, такой что любые 100 шаблонов, получающиеся из него поворотом, имеют общую вершину?