

Серия 24. Покрасим граф

1. В стране провели анкетирование, в котором требовалось назвать любимого писателя, художника и музыканта. Оказалось, что каждый упомянутый хоть раз деятель искусства является любимым ровно k людьми. Докажите, что всех проанкетированных можно разделить на $3k - 2$ группы так, что в каждой группе любые два человека имеют совершенно разные вкусы.
2. Докажите, что вершины графа, в котором степень каждой вершины не более k , можно раскрасить в $k^2 - k + 1$ цвет так, чтобы ни у какой вершины не было двух одноцветных соседей.
3. Дан связный граф, отличный от нечётного цикла. Докажите, что существует раскраска рёбер данного графа в два цвета такая, что в каждой вершине степени больше 1 представлены оба цвета.
4. Рёбра полного графа на 101 вершине раскрашены в 25 цветов так, что нет одноцветных треугольников. Какое наибольшее количество треугольников с рёбрами трёх разных цветов может быть?
5. В школе на 200 учеников организуют факультативные лекции. На каждую предложенную лекцию записалось хотя бы 10 учеников, и для любых двух учеников имеется не более одной лекции, на которую записались бы оба. Докажите, что можно провести все эти лекции в течение 211 дней так, что никому не придётся посетить две лекции за один день.
6. Рёбра графа раскрашены в $d > 1$ цветов так, что в любом пути из трёх различных рёбер (в том числе и замкнутом) первое и последнее ребро покрашены в разные цвета. Докажите, что вершины этого графа можно правильным образом покрасить в d цветов.
7. Дан граф, степень каждой вершины которого равна 3. Известно, что число правильных раскрасок рёбер в 3 цвета не делится на 4. Докажите, что в графе существует гамильтонов цикл.