

Серия 23. Многочлены от многих переменных

1. Существует ли многочлен $P(x, y)$ степени 962 такой, что $P(\cos t, \sin t) = 962$ для всех $t \in \mathbb{R}$?
2. Дан многочлен $P(x, y) = x^n y^n + 1$ ($n \in \mathbb{N}$). Докажите, что не существует многочленов $R(x) \in \mathbb{Z}[x], Q(y) \in \mathbb{Z}[y]$ таких, что $P(x, y) = R(x)Q(y)$.
3. Пусть $f(x)$ – неприводимый многочлен в $\mathbb{Z}[x]$. Обязательно ли многочлен $f(xy)$ неприводим в $\mathbb{Z}[x, y]$?
4. Многочлен $P(x, y) \in \mathbb{Z}[x, y]$ удовлетворяет условиям

$$P(4, 3) = P(2, 4) = P(4, 4) = P(1, 2) = P(1, 3) - 3.$$

Могло ли оказаться так, что $P(x, y) = Q(x) + R(y)$ для некоторых $Q, R \in \mathbb{Z}[x]$?

5. Тройку многочленов $u, v, w \in \mathbb{R}[x, y, z]$ назовём *хорошей*, если существуют многочлены $P, Q, R \in \mathbb{R}[x, y, z]$ такие, что имеет место тождество

$$u^{2019}P + v^{2019}Q + w^{2019}R = 2019.$$

- (a) Является ли хорошей тройка $u = x + 2y + 3, v = y + z + 2, w = x + y + z$?
 - (b) Является ли хорошей тройка $u = x + 2y + 3, v = y + z + 2, w = x + y - z$?
6. Существует ли многочлен $P(x, y)$ с вещественными коэффициентами такой, что $P(x, y) > 0$ тогда и только тогда, когда $x, y > 0$?
 7. Дан многочлен $P(t)$ с действительными коэффициентами такой, что $P(1) = P(-1)$. Докажите, что существует многочлен $Q(x, y)$ с действительными коэффициентами такой, что $P(t) \equiv Q(t^2 - 1, t(t^2 - 1))$.
 8. Пусть $n \in \mathbb{N}$. Докажите, что существует многочлен $P \in \mathbb{Z}[x, y]$ такой, что при условии $a + b + c = 0$ имеет место

$$a^{2n+1} + b^{2n+1} + c^{2n+1} = abc(P(a, b) + P(b, c) + P(c, a)).$$