[ЦПМ, кружок по математике, 10 класс]

Афризонов Д., Юргин Г.

[2019–2020] группы: 10-1, 10-2 *23 января 2020 г.*

Серия 21. Разнобой-2

1. По кольцевой дороге бегут (по часовой стрелке) с постоянными, но различными скоростями несколько спортсменов. У одного из них есть эстафетная палочка. Если один из спортсменов обгоняет другого и у кого-то из них есть эстафетная палочка, то она передаётся (три спортсмена никогда не оказываются в одной точке одновременно). Может ли так оказаться, что как бы долго они не бегали, у двух из них эстафетная палочка так ни разу и не побывает?

2. Пусть a – натуральное число. Даны n различных натуральных чисел, не меньших a. Доказать, что их НОК не меньше na.

3. По кругу стоят 11 натуральных чисел. Известно, что любые два соседних числа различаются хотя бы на 20, при этом в сумме дают хотя бы 100. Какое наименьшее значение может принимать сумма всех этих чисел?

4. Дано простое число p. Нас интересует, найдётся ли такая тройка целых чисел (a, b, c), что для любого натурального n среди чисел вида $a^k + b^k + c^k$ $(k \in \mathbb{N})$ есть число, делящееся на p^n.
(a) Докажите, что при $p = 2$ такой тройки нет.
(b) Докажите, что при всех $p > 2$ такая тройка найдётся.

5. На вечеринке компанию из 20 человек требуется усадить за 4 стола. Рассадка называется *удачной*, если любые два человека, оказавшиеся за одним столом, являются друзьями. Выяснилось, что хотя бы одна удачная рассадка существует, причём при любой удачной рассадке за каждым столом сидят ровно по 5 человек. Каково наибольшее возможное количество пар друзей в этой компании?

6. Даны попарно взаимно простые натуральные числа a, b, c. Найдите все целые значения, которые может принимать следующее выражение:

$$\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{a+c}{b}.$$

7. Некоторые n клеток квадрата $n \times n$ закрашены. При каком наибольшем k заведомо найдётся клетчатый прямоугольник периметра k без закрашенных клеток?

8.* Назовём натуральное число *полосатым*, если любые две соседние цифры в его десятичной записи имеют разную чётность. Найдите все натуральные n, для каждого из которых существует полосатое число, делящееся на n.

[ЦПМ, кружок по математике, 10 класс]

Афризонов Д., Юргин Г.

[2019–2020] группы: 10-1, 10-2 *23 января 2020 г.*

Серия 21. Разнобой-2

1. По кольцевой дороге бегут (по часовой стрелке) с постоянными, но различными скоростями несколько спортсменов. У одного из них есть эстафетная палочка. Если один из спортсменов обгоняет другого и у кого-то из них есть эстафетная палочка, то она передаётся (три спортсмена никогда не оказываются в одной точке одновременно). Может ли так оказаться, что как бы долго они не бегали, у двух из них эстафетная палочка так ни разу и не побывает?

2. Пусть a – натуральное число. Даны n различных натуральных чисел, не меньших a. Доказать, что их НОК не меньше na.

3. По кругу стоят 11 натуральных чисел. Известно, что любые два соседних числа различаются хотя бы на 20, при этом в сумме дают хотя бы 100. Какое наименьшее значение может принимать сумма всех этих чисел?

4. Дано простое число p. Нас интересует, найдётся ли такая тройка целых чисел (a, b, c), что для любого натурального n среди чисел вида $a^k + b^k + c^k$ $(k \in \mathbb{N})$ есть число, делящееся на p^n.
(a) Докажите, что при $p = 2$ такой тройки нет.
(b) Докажите, что при всех $p > 2$ такая тройка найдётся.

5. На вечеринке компанию из 20 человек требуется усадить за 4 стола. Рассадка называется *удачной*, если любые два человека, оказавшиеся за одним столом, являются друзьями. Выяснилось, что хотя бы одна удачная рассадка существует, причём при любой удачной рассадке за каждым столом сидят ровно по 5 человек. Каково наибольшее возможное количество пар друзей в этой компании?

6. Даны попарно взаимно простые натуральные числа a, b, c. Найдите все целые значения, которые может принимать следующее выражение:

$$\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{a+c}{b}.$$

7. Некоторые n клеток квадрата $n \times n$ закрашены. При каком наибольшем k заведомо найдётся клетчатый прямоугольник периметра k без закрашенных клеток?

8.* Назовём натуральное число *полосатым*, если любые две соседние цифры в его десятичной записи имеют разную чётность. Найдите все натуральные n, для каждого из которых существует полосатое число, делящееся на n.