Серия 20. Неравенства

1. Для любых положительных чисел a, b, c, d докажите, что

$$\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{(a+b)(c+d)} \geqslant \sqrt{abcd}.$$

2. Сумма неотрицательных чисел a, b, c, d равна 4. Докажите неравенство

$$(a^2+b^2)cd+(c^2+d^2)ab \leqslant 4.$$

3. Сумма положительных чисел a, b, c равна 3. Докажите неравенство

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c} \geqslant ab+bc+ac.$$

4. Положительные числа a, b, c таковы, что $a+b+c=1$. Докажите, что

$$\frac{bc}{1-a^2}+\frac{ca}{1-b^2}+\frac{ab}{1-c^2} \leqslant \frac{3}{8}.$$

5. Для любых положительных чисел a, b, c докажите, что

$$\frac{a^2b}{a+2b}+\frac{b^2c}{b+2c}+\frac{c^2a}{c+2a} < \frac{(a+b+c)^2}{8}.$$

6. Дано натуральное число n. Положительные числа x_1, x_2, $\ldots$, x_n удовлетворяют равенству $x_1+\ldots+x_n=n$. Докажите неравенство

$$\frac{x_1}{x_1^2+1}+\frac{x_2}{x_2^2+1}+\ldots+\frac{x_n}{x_n^2+1} \leqslant \frac{1}{x_1+1}+\frac{1}{x_2+1}+\ldots+\frac{1}{x_n+1}.$$

7. Пусть a_1, a_2, $\ldots$, a_n — положительные числа, сумма квадратов которых равна 1. Докажите неравенство

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_ia_{i+1}}{2-(a_i-a_{i+1})^2} \leqslant \frac{1}{2}$$

(нумерация переменных циклическая, т. е. $a_{n+1}=a_1$).

8. Докажите, что любые положительные числа a, b, c удовлетворяют неравенству

$$\frac{1}{(a+b)b}+\frac{1}{(b+c)c}+\frac{1}{(c+a)a} \geqslant \frac{9}{2(ab+bc+ca)}.$$