

Серия 19. Разнобой

1. За круглым столом на одинаковом расстоянии друг от друга сидят 100 человек. Каждый заказал себе порцию мороженого, всего заказали 51 порцию орехового и 49 порций клубничного. Заказ принесли правильно, но расставили перед людьми в произвольном порядке. Докажите, что можно повернуть стол так, чтобы по крайней мере у 52 человек был тот вкус мороженого, который эти люди заказали.
2. Последовательность натуральных чисел $a_1, a_2, a_3, \dots$ удовлетворяет условию $a_p + a_q = a_r + a_s$ для всех натуральных p, q, r, s , связанных соотношением $p \cdot q = r \cdot s$. Докажите, что $a_m \leq a_{mn}$ для любых натуральных m и n .
3. В очереди к стоматологу стоят 30 ребят: мальчиков и девочек. Часы на стене показывают 8 часов, 00 минут и 01 секунду. Как только начинается новая минута, каждый мальчик, за которым стоит девочка, пропускает её вперед. Докажите, что перестановки в очереди закончатся строго до 8:30, когда откроется дверь кабинета.
4. Число N , не делящееся на 81, представимо в виде суммы квадратов трёх целых чисел, делящихся на 3. Докажите, что оно также представимо в виде суммы квадратов трёх целых чисел, не делящихся на 3.
5. На столе лежат купюры достоинством $1, 2, \dots, 2n$ тугриков. Двое ходят по очереди. Каждым ходом игрок снимает со стола две купюры, большую отдает сопернику, а меньшую забирает себе. Каждый стремится получить как можно больше денег. Сколько тугриков получит начинающий при правильной игре?
6. Существует ли многочлен $P(x)$ такой, что $P(1) = 1$, $P(2) = 2$ и $P(n)$ иррационально для любого целого n , отличного от 1 и 2?
7. При изготовлении партии из $N \geq 5$ монет работник по ошибке изготовил две монеты из другого материала (все монеты выглядят одинаково). Начальник знает, что таких монет ровно две, что они весят одинаково, но отличаются по весу от остальных. Работник знает, какие это монеты и что они легче остальных. Ему нужно, проведя два взвешивания на чашечных весах без гирь, убедить начальника в том, что фальшивые монеты легче настоящих, и в том, какие именно монеты фальшивые. Может ли он это сделать?

Серия 19. Разнобой

1. За круглым столом на одинаковом расстоянии друг от друга сидят 100 человек. Каждый заказал себе порцию мороженого, всего заказали 51 порцию орехового и 49 порций клубничного. Заказ принесли правильно, но расставили перед людьми в произвольном порядке. Докажите, что можно повернуть стол так, чтобы по крайней мере у 52 человек был тот вкус мороженого, который эти люди заказали.
2. Последовательность натуральных чисел $a_1, a_2, a_3, \dots$ удовлетворяет условию $a_p + a_q = a_r + a_s$ для всех натуральных p, q, r, s , связанных соотношением $p \cdot q = r \cdot s$. Докажите, что $a_m \leq a_{mn}$ для любых натуральных m и n .
3. В очереди к стоматологу стоят 30 ребят: мальчиков и девочек. Часы на стене показывают 8 часов, 00 минут и 01 секунду. Как только начинается новая минута, каждый мальчик, за которым стоит девочка, пропускает её вперед. Докажите, что перестановки в очереди закончатся строго до 8:30, когда откроется дверь кабинета.
4. Число N , не делящееся на 81, представимо в виде суммы квадратов трёх целых чисел, делящихся на 3. Докажите, что оно также представимо в виде суммы квадратов трёх целых чисел, не делящихся на 3.
5. На столе лежат купюры достоинством $1, 2, \dots, 2n$ тугриков. Двое ходят по очереди. Каждым ходом игрок снимает со стола две купюры, большую отдает сопернику, а меньшую забирает себе. Каждый стремится получить как можно больше денег. Сколько тугриков получит начинающий при правильной игре?
6. Существует ли многочлен $P(x)$ такой, что $P(1) = 1$, $P(2) = 2$ и $P(n)$ иррационально для любого целого n , отличного от 1 и 2?
7. При изготовлении партии из $N \geq 5$ монет работник по ошибке изготовил две монеты из другого материала (все монеты выглядят одинаково). Начальник знает, что таких монет ровно две, что они весят одинаково, но отличаются по весу от остальных. Работник знает, какие это монеты и что они легче остальных. Ему нужно, проведя два взвешивания на чашечных весах без гирь, убедить начальника в том, что фальшивые монеты легче настоящих, и в том, какие именно монеты фальшивые. Может ли он это сделать?