Серия 18. Движение точек, часть 2

Теорема. Если три точки движутся по прямым с сохранением двойных отношений и четыре раза лежат на одной прямой, то они всегда лежат на одной прямой. Если три прямые вращаются с сохранением двойных отношений и четыре раза пересекаются в одной точке, то они всегда пересекаются в одной точке.

Идея доказательства. В первой части можно выбрать один из четырёх моментов, когда точки лежат на одной прямой, и эту прямую увести на бесконечность проективным преобразованием. Точки после преобразования по-прежнему ездят с сохранением двойных отношений и теперь одновременно приезжают на бесконечность — то есть зависят друг от друга линейно. Мы имеем ещё три состояния, когда они лежат на одной прямой. Известный факт: если три линейно движущиеся точки три раза коллинеарны, то они всегда коллинеарны.

Вторая часть полярно двойственна первой.

1. Вписанная окружность треугольника ABC имеет центр I и касается его сторон BC, CA, AB в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. На отрезках IA_1, IB_1, IC_1 отмечены точки A_2, B_2, C_2 соответственно так, что $IA_2 = IB_2 = IC_2$. Докажите, что прямые AA_2, BB_2, CC_2 пересекаются в одной точке.

2. На описанной окружности треугольника ABC отмечены точки P и Q. Прямая ℓ пересекает прямые BC, CA, AB в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Окружность (PQA_1) второй раз пересекает прямую BC в точке A_2, окружность (PQB_1) второй раз пересекает прямую CA в точке B_2, окружность (PQC_1) второй раз пересекает прямую AB в точке C_2. Докажите, что точки A_2, B_2, C_2 лежат на одной прямой.

3. На сторонах AB, AC остроугольного треугольника ABC отмечены точки P и Q соответственно так, что четырёхугольник $BPQC$ — вписанный. Докажите, что прямая, соединяющая ортоцентры треугольников ABC и APQ, проходит через точку пересечения прямых BQ и CP.

4. (**Теорема Дроз-Фарни**) Через ортоцентр остроугольного треугольника провели две перпендикулярные прямые. Докажите, что середины отрезков, которые эти прямые высекают на сторонах или продолжениях сторон треугольника, лежат на одной прямой

5. (*Китай-2019*) В треугольнике ABC таком, что $AB > AC$, биссектриса угла BAC пересекает сторону BC в точке D. Точка P лежит на продолжении прямой DA за точку A. Прямая PQ касается окружности (ABD) в точке Q (Q и B лежат по одну сторону от прямой AD); прямая PR касается окружности (ACD) в точке R (R и C лежат по одну сторону от прямой AD). Отрезки BR и CQ пересекаются в точке K. Прямая, проходящая через K и параллельная прямой BC, пересекает прямые QD, AD и RD в точках E, L и F соответственно. Докажите, что $EL = FK$.