Серия 17. Движение точек

1. Дана трапеция $ABCD$, в которой $BC \parallel AD$ и $AB = BD$. На прямых AC, CD отмечены такие точки P, Q соответственно, что прямая PQ делит отрезок AD пополам. Докажите, что прямые BP и BQ симметричны относительно биссектрисы угла ABD.

2. В остроугольном треугольнике ABC проведена высота AD. На его сторонах AB и AC вовне построены подобные прямоугольные треугольники ABU и ACV ($\angle ABU = \angle ACV = 90°$, $\angle BAU = \angle CAV$). Докажите, что прямые BV и CU пересекаются на прямой AD.

3. Точки A', B', C' — середины «меньших» дуг BC, CA, AB описанной окружности треугольника ABC. Прямые ℓ_B и ℓ_C — биссектрисы внешних углов ABC и ACB соответственно. На отрезке BC выбрана произвольная точка X. Перпендикуляр к прямой ℓ_B, проходящий через точку X, пересекает прямую ℓ_C в точке Y. Перпендикуляр к прямой ℓ_C, проходящий через точку X, пересекает прямую ℓ_B в точке Z. Докажите, что прямые $A'X$, $B'Y$, $C'Z$ пересекаются в одной точке, лежащей на окружности (ABC).

Если в конструкции очередного изучаемого отображения много окружностей, то инверсия поможет вам убедиться в сохранении двойных отношений.

4. На стороне BC треугольника ABC выбрана точка P. Произвольная секущая, проходящая через точку P, пересекает окружность (ABC) в точках M и N. Прямые AM и AN пересекают прямую BC в точках X и Y. Докажите, что окружность (AXY) проходит через фиксированную (т. е. не зависящую от выбора секущей) точку, отличную от A.

5. Равносторонний треугольник ABC вписан в окружность Ω и описан вокруг окружности ω. На сторонах AC и AB выбраны точки P и Q соответственно так, что отрезок PQ проходит через центр треугольника ABC. Окружности Γ_b и Γ_c построены на отрезках BP и CQ как на диаметрах. Докажите, что окружности Γ_b и Γ_c пересекаются в двух точках, одна из которых лежит на Ω, а другая — на ω.

6. Точка D лежит на стороне BC треугольника ABC. Точки I, I_1 и I_2 — центры вписанных окружностей ABC, ABD и ACD соответственно; точки M и N — вторые точки пересечения окружности (ABC) с окружностями (IAI_1) и (IAI_2) соответственно. Докажите, что прямая MN проходит через постоянную точку, не зависящую от выбора точки D.

7. Дан описанный четырёхугольник $ABCD$. Окружности ω_1 и ω_2 вписаны в треугольники ABC и ADC соответственно. Окружность Ω касается этих двух окружностей внутренним образом в точках K и L соответственно. Докажите, что прямые BK и DL пересекаются на прямой AC.