Серия 15. Суперпозиции многочленов

Для многочлена $P(x)$ и натурального числа k через $P_k(x)$ будем обозначать многочлен

$$\underbrace{P(P(\ldots P}_{k\text{ раз}}(x)\ldots)).$$

1. Пусть $P(x)$ — многочлен нечётной степени. Докажите, что многочлен $P_2(x)$ имеет не меньше различных вещественных корней, чем $P(x)$.

2. Квадратные трёхчлены $f(x)$ и $g(x)$ имеют положительный старший коэффициент и таковы, что многочлены $f(g(x))$ и $g(f(x))$ не имеют вещественных корней. Докажите, что хотя бы один из многочленов $f(f(x))$ и $g(g(x))$ не имеет вещественных корней.
Внимание! В этой задаче принимается только короткое решение, не содержащее каких бы то ни было вычислений.

3. Многочлен $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ имеет три различных действительных корня, а многочлен $P(Q(x))$, где $Q(x) = x^2 + x + 2019$, действительных корней не имеет. Докажите, что $P(2019) > 1/64$.

4. Пусть $P(x)$ – квадратный трёхчлен с целыми коэффициентами. Докажите, что уравнение $P_2(x) = x$ имеет не более двух различных целых корней.
Подсказка. В это задаче нужно вспомнить один постой, но важный факт про многочлены с целыми коэффициентами.

5. Пусть $f(x)$, $g(x)$ и $h(x)$ – квадратные трёхчлены. Может ли уравнение
$$f(g(h(x))) = 0$$
иметь корни 1,2,3,4,5,6,7 и 8?

6. Пусть $P(x)$ – многочлен степени $n > 1$ с целыми коэффициентами. Докажите, что при любом натуральном k уравнение $P_k(x) = x$ имеет не более n различных целых корней.

[ЦПМ, кружок по математике, 10 класс] Афризонов Д., Юргин Г.
[*2019–2020*] группы: 10-1, 10-2 *5 декабря 2019 г.*

Серия 15. Суперпозиции многочленов

Для многочлена $P(x)$ и натурального числа k через $P_k(x)$ будем обозначать многочлен

$$\underbrace{P(P(\ldots P}_{k\text{ раз}}(x)\ldots)).$$

1. Пусть $P(x)$ — многочлен нечётной степени. Докажите, что многочлен $P_2(x)$ имеет не меньше различных вещественных корней, чем $P(x)$.

2. Квадратные трёхчлены $f(x)$ и $g(x)$ имеют положительный старший коэффициент и таковы, что многочлены $f(g(x))$ и $g(f(x))$ не имеют вещественных корней. Докажите, что хотя бы один из многочленов $f(f(x))$ и $g(g(x))$ не имеет вещественных корней.
Внимание! В этой задаче принимается только короткое решение, не содержащее каких бы то ни было вычислений.

3. Многочлен $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ имеет три различных действительных корня, а многочлен $P(Q(x))$, где $Q(x) = x^2 + x + 2019$, действительных корней не имеет. Докажите, что $P(2019) > 1/64$.

4. Пусть $P(x)$ – квадратный трёхчлен с целыми коэффициентами. Докажите, что уравнение $P_2(x) = x$ имеет не более двух различных целых корней.
Подсказка. В это задаче нужно вспомнить один постой, но важный факт про многочлены с целыми коэффициентами.

5. Пусть $f(x)$, $g(x)$ и $h(x)$ – квадратные трёхчлены. Может ли уравнение
$$f(g(h(x))) = 0$$
иметь корни 1,2,3,4,5,6,7 и 8?

6. Пусть $P(x)$ – многочлен степени $n > 1$ с целыми коэффициентами. Докажите, что при любом натуральном k уравнение $P_k(x) = x$ имеет не более n различных целых корней.