Серия 14. Линейная алгебра в комбинаторике

1. Имеется $n+1$ непустых подмножеств n-элементного множества. Докажите, что ненулевую часть из них можно покрасить в красный или синий цвет так, чтобы объединение красных подмножеств совпадало с объединением синих.

2. *Квадрикой* на координатной плоскости назовём множество нулей многочлена $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F$ (A, B, C не равны одновременно нулю) с вещественными коэффициентами. **(a)** Докажите, что через любые пять различных точек плоскости проходит хотя бы одна квадрика. **(b)** Докажите, что через любые пять различных точек плоскости, никакие четыре из которых не лежат на одной прямой, проходит единственная квадрика. *Кстати, пара прямых — это тоже квадрика.*

3. Есть несколько лампочек и несколько кнопок. Каждая кнопка подсоединена к некоторому набору лампочек и при нажатии на неё состояние лампочек из этого набора меняется на противоположное. Подмножество лампочек назовём *инвариантным*, если каждая кнопка меняет состояния чётного числа лампочек этого подмножества. Докажите, что из одного состояния лампочек можно получить другое тогда и только тогда, когда у обоих состояний чётность числа включенных лампочек во всех инвариантных подмножествах совпадает.

4. Дан квадрат, разбитый на клетки 1×1. По линиям разбиения (внутри квадрата или на его границе) проведены несколько контуров, каждый из которых ограничивает некоторый прямоугольник. Может ли оказаться, что через любую сторону любой клетки будет проходить нечётное число указанных контуров?

5. В КИМах ЕГО (Единой Государственной Олимпиады) n тестовых вопросов, на каждый из которых можно ответить либо правильно, либо неправильно. В 2019 году в ЕГО приняли участие k человек. Результаты участников оказались такими, что проверочная комиссия может так приписать положительные веса тестовым вопросам, чтобы участники по первичным балам расположились в любом наперёд проплаченном порядке. Докажите, что $n \geqslant k$.

6. К каждой вершине графа прикручена лампочка, изначально все лампочки выключены. За один раз можно выбрать любую вершину графа и поменять все состояния лампочек в ней самой и во всех её соседях на противоположные. *Включить граф* $\iff$ включить все лампочки.
(a) Хорёк умеет включать граф за x операций, а Улитка — за y. Докажите, что число $|x-y|$ чётно.
(b) Докажите, что граф вообще можно включить.

7. В полном графе на n вершинах выделили k полных подграфов на меньшем числе вершин. Оказалось, что каждое ребро исходного графа покрыто ровно одним подграфом. Докажите, что $k \geqslant n$.

[ЦПМ, кружок по математике, 10 класс] Афризонов Д.
[*2019–2020*] группа: 10-1 и 10-2 *02 декабря 2019 г.*

Серия 14. Линейная алгебра в комбинаторике

1. Имеется $n+1$ непустых подмножеств n-элементного множества. Докажите, что ненулевую часть из них можно покрасить в красный или синий цвет так, чтобы объединение красных подмножеств совпадало с объединением синих.

2. *Квадрикой* на координатной плоскости назовём множество нулей многочлена $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F$ (A, B, C не равны одновременно нулю) с вещественными коэффициентами. **(a)** Докажите, что через любые пять различных точек плоскости проходит хотя бы одна квадрика. **(b)** Докажите, что через любые пять различных точек плоскости, никакие четыре из которых не лежат на одной прямой, проходит единственная квадрика. *Кстати, пара прямых — это тоже квадрика.*

3. Есть несколько лампочек и несколько кнопок. Каждая кнопка подсоединена к некоторому набору лампочек и при нажатии на неё состояние лампочек из этого набора меняется на противоположное. Подмножество лампочек назовём *инвариантным*, если каждая кнопка меняет состояния чётного числа лампочек этого подмножества. Докажите, что из одного состояния лампочек можно получить другое тогда и только тогда, когда у обоих состояний чётность числа включенных лампочек во всех инвариантных подмножествах совпадает.

4. Дан квадрат, разбитый на клетки 1×1. По линиям разбиения (внутри квадрата или на его границе) проведены несколько контуров, каждый из которых ограничивает некоторый прямоугольник. Может ли оказаться, что через любую сторону любой клетки будет проходить нечётное число указанных контуров?

5. В КИМах ЕГО (Единой Государственной Олимпиады) n тестовых вопросов, на каждый из которых можно ответить либо правильно, либо неправильно. В 2019 году в ЕГО приняли участие k человек. Результаты участников оказались такими, что проверочная комиссия может так приписать положительные веса тестовым вопросам, чтобы участники по первичным балам расположились в любом наперёд проплаченном порядке. Докажите, что $n \geqslant k$.

6. К каждой вершине графа прикручена лампочка, изначально все лампочки выключены. За один раз можно выбрать любую вершину графа и поменять все состояния лампочек в ней самой и во всех её соседях на противоположные. *Включить граф* $\iff$ включить все лампочки.
(a) Хорёк умеет включать граф за x операций, а Улитка — за y. Докажите, что число $|x-y|$ чётно.
(b) Докажите, что граф вообще можно включить.

7. В полном графе на n вершинах выделили k полных подграфов на меньшем числе вершин. Оказалось, что каждое ребро исходного графа покрыто ровно одним подграфом. Докажите, что $k \geqslant n$.