Серия 12. Линейные пространства

Пусть $\mathbb{K}$ — *поле*, нас снова будут интересовать лишь примеры $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_p$. Операции внутри поля будут обозначаться символами «$+_{\mathbb{K}}$», «$\cdot_{\mathbb{K}}$», а элементы $\lambda \in \mathbb{K}$ называться *числами.*

Линейный (векторным) пространством над полем $\mathbb{K}$ называется множество V (элементы $\mathbf{v} \in V$ которого будут называться *векторами*), снабжённое операциями сложения векторов «$+_V$» и умножения числа на вектор «$\cdot_V$», удовлетворяющими следующим свойствам (аксиомам):

- $(V, +_V)$ — *коммутативная (абелева) группа*: сложение векторов ассоциативно и коммутативно; существует нейтральный по сложению вектор $\mathbf{0}$; для каждого вектора $\mathbf{v}$ существует обратный по сложению $-\mathbf{v}$.
- Дистрибутивность (левая и правая): $(\lambda + \mu) \cdot \mathbf{v} = \lambda \cdot \mathbf{v} + \mu \cdot \mathbf{v}$, $\lambda \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \lambda \cdot \mathbf{v} + \lambda \cdot \mathbf{w}$.
- Ассоциативность разных умножений и унитарность: $(\lambda \cdot \mu) \cdot \mathbf{v} = \lambda \cdot (\mu \cdot \mathbf{v}), 1 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}$.

Индексы операций опущены, но по аргументам легко догадаться, о каком именно сложении или умножении идёт речь. В дальнейшем будет опущен также знак умножения.

1. Какие из следующих множеств являются векторными пространства относительно естественных операций? (Предъявите табличку с ответами «да» или «нет».)
(a) $\mathbb{R}$ над полем $\mathbb{Q}$.
(b) $\mathbb{Q}$ над полем $\mathbb{R}$.
(c) Бесконечные последовательности вещественных чисел над полем $\mathbb{R}$.
(d) Ограниченные бесконечные последовательности рациональных чисел над полем $\mathbb{Q}$.
(e) Неубывающие бесконечные последовательности вещественных чисел над полем $\mathbb{R}$.
(f) Бесконечные периодические последовательности остатков по простому модулю p над полем $\mathbb{Z}_p$.
(g) Многочлены степени ровно 100 с комплексными коэффициентами над полем $\mathbb{C}$.
(h) Множество рациональных решений однородной СЛУ с коэффициентами из $\mathbb{Q}$ над полем $\mathbb{Q}$.
(i) Множество вещественных решений неоднородной СЛУ с коэффициентами из $\mathbb{R}$ над полем $\mathbb{R}$.
(j) Бесконечные последовательности F_n вещественных чисел, удовлетворяющие рекуррентному соотношению $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ над полем $\mathbb{R}$.

Выражение вида $\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \ldots + \lambda_k \mathbf{v}_k$ называется *линейной комбинацией* векторов $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$. Линейная комбинация *тривиальна*, если все $\lambda_i = 0$. Набор векторов $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ называется *линейно зависимым*, если существует нетривиальная линейная комбинация этих векторов со значением $\mathbf{0}$.

2. Докажите, что набор векторов линейно зависим тогда и только тогда, когда один из векторов этого набора выражается как линейная комбинация остальных.

3. (***Основная лемма о линейной зависимости.***) Пусть $m < k$, и каждый из векторов набора $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_k$ выражается как линейная комбинация векторов $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$. Докажите, что векторы $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_k$ линейно зависимы.

Линейной оболочкой набора векторов $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ называется множество значений всевозможных линейных комбинаций этого набора.

4. **(a)** Известно, что набор векторов $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ линейно независим, но если к этом набору добавить любой вектор $\mathbf{v}$, то условие линейной независимости нарушится. Докажите, что эти векторы своими линейными комбинациями порождают всё пространство. **(b)** Известно, что набор векторов $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ своими линейными комбинациями порождает все пространство, но при этом он теряет это свойство при удалении из него любого вектора. Докажите, что этот набор линейно независим.

Базисом пространства называется любой максимальный по включению линейно независимый набор векторов. Эквивалентное определение: *базисом* называется любой минимальный по включению набор векторов, порождающий линейными комбинациями всё пространство.

5. Изначально у Пети была пустая корзинка, которую он заполнял векторами линейного пространства V. На каждом шаге он добавляет в неё один новый произвольный вектор так, чтобы текущий набор векторов в корзинке был линейно независим. Если на очередном шаге подходящего вектора нет, то процесс заполнения корзинки останавливается.

В параллельной вселенной Вася занимается тем же самым: у него есть своя корзинка, в которую он набирает векторы того же самого линейного пространства V по тем же правилам.

Докажите, что как бы Петя и Вася ни заполняли свои корзинки, они либо оба остановятся на одном и том же шаге, либо оба не остановятся никогда.

Размерностью линейного пространства V называется количество векторов в любом его базисе (обозначение: $\dim V$). Если же у пространства нет конечных базисов, то оно полагается бесконечной размерности.

В конечномерном пространстве любой линейно независимый набор векторов можно дополнить до базиса всего пространства.

Если в линейном пространстве V выбран фиксированный базис $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$, то всякий вектор $\mathbf{v} \in V$ единственным образом раскладывается в линейную комбинацию базисных векторов:

$$\mathbf{v} = x_1 \cdot \mathbf{e}_1 + x_2 \cdot \mathbf{e}_2 + \ldots + x_n \cdot \mathbf{e}_n.$$

Коэффициенты $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ этого разложения называются *координатами* вектора $\mathbf{v}$. Отображение $f\colon V \to \mathbb{K}^n$, сопоставляющее всякому вектору набор его координат, является изоморфизмом линейных пространств V и $\mathbb{K}^n$. Следствие: линейные пространства одинаковой размерности изоморфны.

Подпространством линейного пространства V называется его любое непустое подмножество W, замкнутое относительно операций сложения векторов и умножения вектора на любое число. Подпространство само является линейным пространством относительно индуцированных операций.

6. Предположим, что в линейном пространстве V зафиксирован базис $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$. **(a)** Докажите, что множество векторов, координаты которых удовлетворяют линейному уравнению $A_1 \cdot x_1 + A_2 \cdot x_2 + \ldots + A_n \cdot x_n = 0$, где $A_i \in \mathbb{K}$ и не все равны 0, служит подпространством размерности $n-1$ пространства V. **(b)** Докажите, что система k линейно независимых уравнений определяет подпространство размерности $n-k$.

$$\begin{cases} A_{11} \cdot x_1 + A_{12} \cdot x_2 + \ldots + A_{1n} \cdot x_n = 0, \\ A_{21} \cdot x_1 + A_{22} \cdot x_2 + \ldots + A_{2n} \cdot x_n = 0, \\ \qquad \ldots \\ A_{k1} \cdot x_1 + A_{k2} \cdot x_2 + \ldots + A_{kn} \cdot x_n = 0. \end{cases}$$

7. *Суммой* подпространств V_1, V_2 линейного пространства V (обозначение $V_1 + V_2$) назовём линейную оболочку их объединения. Докажите, что

$$\dim V_1 + \dim V_2 = \dim(V_1 + V_2) + \dim(V_1 \cap V_2).$$