# Серия 10. Лампочки и побитовые суммы

**1.** Даны натуральные числа $n$ и $k$. Набор последовательностей из $n$ нулей и единиц назовём *разреженным*, если любые две последовательности этого набора различаются хотя бы в $k$ разрядах. Докажите, что к любому разреженному набору из трёх последовательностей можно добавить ещё одну, сохранив свойство разреженности.

**2.** Имеется набор из $n$ изначально не горящих лампочек и $k$ выключателей. Каждый выключатель соединён с некоторыми лампочками. При нажатии выключателя, все соединённые с ним лампочки меняют своё состояние (если горели, то гаснут, если не горели, то загораются).
**(a)** Докажите, что если $k < n$, то при любом соединении лампочек и выключателей найдётся такая комбинация горящих лампочек, которую нельзя получить, нажимая выключатели.
**(b)** Докажите, что если $k > n$, то существует непустое подмножество выключателей, после нажатия на каждый из которых в некотором порядке все лампочки оказываются не горящими.

**3.** Есть доска $100 \times 100$ с изначально выключенными лампочками в клетках. За одну операцию разрешается поменять состояния всех лампочек в любом *кресте* (объединение строки и столбца). Докажите, что приведёнными операциями можно получить любое наперёд заданное состояние доски.

**4.** По кругу сидят $n$ хамелеонов. Каждый хамелеон либо зелёный, либо жёлтый. Каждую минуту все хамелеоны, оба соседа которых разноцветные, одновременно меняют свой цвет. Докажите, что если $n$ не делится на 3, то однажды изначальная комбинация цветов хамелеонов повторится.

**5.** **(a)** На столе лежат $k$ куч камней, изначальные числа камней в кучах обозначим через $N_1, N_2, \ldots N_k$. Двое играют в игру. За один ход разрешается взять из одной кучи любое натуральное число камней. Игроки ходят поочерёдно. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Докажите, что у начинающего игрока нет выигрышной стратегии тогда и только тогда, когда $N_1 \oplus N_2 \oplus \ldots \oplus N_k = 0$.
**(b)** У какого игрока (в зависимости от чисел $N_i$) есть выигрышная стратегия, если теперь *выигрывает* тот, кто не может сделать ход?

**6.** Фокусник и ассистент показывают фокус. Ассистент даёт в распоряжение зрителя шахматную доску. Зритель может перекрасить некоторые клетки и называет ассистенту одну из клеток. После чего ассистент перекрашивает ещё одну клетку. Затем входит фокусник. Он видит только текущее состояние доски и должен назвать клетку, которую загадал зритель. Придумайте алгоритм, позволяющий ассистенту и фокуснику осуществить задуманное.