Серия 9. Триангуляции

1. Докажите, при $n \geqslant 4$ в любом разрезании выпуклого n-угольника диагоналями на треугольники найдутся два треугольника, две стороны каждого из которых служат сторонами исходного n-угольника *(«уши триангуляции»)*.

2. Выпуклый многоугольник разрезан диагоналями на равнобедренные треугольники. Докажите, что в исходном многоугольнике есть две равные стороны.

3. Вершины выпуклого многоугольника раскрашены в три цвета так, что никакие две соседние вершины не покрашены в один цвет и все цвета присутствуют. Докажите, что многоугольник можно разрезать диагоналями на треугольники, в каждом из которых все вершины разного цвета.

4. Сколько существует способов разрезать выпуклый n-угольник диагоналями на треугольники так, чтобы никакой треугольник не имел в качестве всех трёх своих сторон три диагонали исходного n-угольника?

5. Докажите, что выпуклый многоугольник может быть разрезан непересекающимися диагоналями на остроугольные треугольники не более чем одним способом.

6. Дан выпуклый многоугольник, никакие четыре вершины которого не лежат на одной окружности. Назовём окружность *граничной*, если она проходит через три подряд идущие вершины многоугольника и содержит многоугольник внутри. Назовём окружность *внутренней*, если она проходит через три попарно несоседние вершины многоугольника и содержит многоугольник внутри. Докажите, что граничных окружностей на две больше, чем внутренних.

7. Вписанный многоугольник разрезан непересекающимися диагоналями на треугольники. Докажите, что сумма радиусов вписанных окружностей этих треугольников не зависит от способа разрезания.

8. Дан выпуклый n-угольник. Назовем окружность *полувписанной*, если она полностью лежит в этом n-угольнике и касается трёх его сторон. Известно, что никакие четыре прямые, содержащие стороны n-угольника, не касаются одной окружности. Докажите, что полувписанных окружностей ровно $n-2$.