Симметрические многочлены

Определение. Многочлен от n переменных называется *симметрическим*, если он не меняется при любых перестановках его переменных.

Определение. Элементарные симметрические многочлены

$$e_k(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k}$$

Основная теорема о симметрических многочленах. Всякий симметрический многочлен (с рациональными/вещественными/комплексными коэффициентами) единственным образом представляется в виде многочлена (с коэффициентами в том же поле) от элементарных симметрических многочленов.

Более того, всякий симметрический многочлен с коэффициентами в $\mathbb{Z}$ единственным образом представляется в виде многочлена с коэффициентами в $\mathbb{Z}$ от элементарных симметрических многочленов.

1. Пусть дан симметрический многочлен от n переменных $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Рассмотрим все его мономы. Назовем моном $q = a x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$ старшим, если упорядоченный набор степеней $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ мажорирует все остальные наборы относительно лексикографического порядка.
(a) Докажите, что старший моном произведения двух многочленов равен произведению старших мономов сомножителей.
(b) Для любого монома q вида $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n};\ \alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \ldots \geqslant \alpha_n$ существуют такие неотрицательные целые числа $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$, что старший моном многочлена $e_1^{\beta_1} e_2^{\beta_2} \cdots e_n^{\beta_n}$ совпадает с q, причем числа $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ определены этим условием однозначно.
(c) Докажите основную теорему о симметрических многочленах.

2. Про целые числа a, b, c известно, что $a+b+c = 0$. Докажите, что число $2a^4+2b^4+2c^4$ является квадратом целого числа.

3. Дан многочлен с рациональными коэффициентами. Докажите, что любой симметрический многочлен от его (комплексных) корней есть рациональное число.

4. Пусть x_1, x_2, x_3 – корни многочлена $x^3 + px + q \quad (p, q \in \mathbb{R};\ x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C})$.
(a) Выразите через p и q число

$$D = (x_1 - x_2)^2 (x_1 - x_3)^2 (x_2 - x_3)^2$$

Это число называется *дискриминантом* многочлена x^3+px+q. Мы, таким образом, получили необходимое и достаточное условие на p и q, при котором многочлен $x^3 + px + q$ имеет кратный корень.
(b) Найдите необходимое и достаточное условие на p и q, при котором многочлен $x^3 + px + q$ имеет три вещественных корня (возможно, кратных).

5. Докажите, что произведение всех чисел вида $\pm\sqrt{1} \pm \sqrt{2} \pm \sqrt{3} \pm \cdots \pm \sqrt{2019}$ является целым числом.

6. **(a)** Многочлены $p_k(x_1, \ldots, x_n) := x_1^k + \ldots, x_n^k$ называются *Ньютоновскими степенными суммами*. Докажите, что выполнены *тождества Ньютона*:

$$ke_k = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} e_{k-i} p_i$$

(здесь k – произвольное натуральное число; считаем $e_0 = 1, \quad e_k = 0$ при $k > n$).
(b) Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – не обязательно различные вещественные числа. Докажите, что значения ньютоновских степенных сумм p_k в точке $(a_1, \ldots, a_n)$ при $k = 1, \ldots, n$ однозначно определяют мультимножество $\{a_1, \ldots, a_n\}$.

7. **(a)** Пусть $P(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n)$ – многочлен, не меняющийся при перестановках переменных $x_1, \ldots, x_m$ и не меняющийся при перестановках переменных $y_1, \ldots, y_n$. Докажите, что P представляется в виде многочлена от $e_i(x_1, \ldots, x_m),\ e_j(y_1, \ldots, y_n)$.
(b) Пусть α — корень многочлена $f(x)$ с рациональными коэффициентами, β — корень многочлена $g(x)$ с рациональными коэффициентами. Постройте многочлен с рациональными коэффициентами, для которого $\alpha + \beta$ является корнем. То же самое проделайте для $\alpha\beta$.