

Серия 5^{1/2}. Немного непростых графов

1. В стране, состоящей из двух республик A и B , провели несколько дорог с односторонним движением из городов, ведущих из республики A в города республики B , так, что из каждого города республики A выходит хотя бы одна дорога и в каждый город республики B входит как минимум одна дорога. В республиках по 100 городов. Докажите, что можно провести не более 100 новых дорог с односторонним движением так, чтобы из любого города стало возможным доехать до любого другого. Разрешается соединять два города несколькими дорогами.
2. Клетчатый прямоугольник $m \times n$ склеили в тор ($m, n \geq 2$). На каждой стороне клетки поставили стрелку так, что в каждую вершину входит ровно по две стрелки. Докажите, что в полученном графе есть простой чётный цикл.
3. (*All-Russian olympiad 2006, final round*) A group of pioneers has arrived to summer camp. Each pioneer has at least 50 and at most 100 friends among the others. Prove that one can distribute field caps of 1331 colors among the pioneers so that the friends of each pioneer have caps of at least 20 colors.