

Серия 5. Бесконечность не предел

1. Два игрока играют в шахматы на деньги. Ставка составляет 1 рубль. Ничьих не бывает. Изначально у первого 2 рубля, а у второго 1 рубль, но первый разряд. Поэтому вероятность победы перворазрядника в каждой партии составляет $\frac{2}{3}$. Игра заканчивается, когда у одного из них заканчиваются деньги. Какова вероятность перворазрядника заработать сегодня?
2. В нулевой момент времени появилась частица. Все частицы существуют ровно одну секунду, в конце своей жизни порождая (равновероятно, независимо друг от друга) 0, 1, 2 или 3 новые частицы. С какой вероятностью все частицы когда-нибудь умрут?
3. Двое играют в следующую игру. Первый бросает n кубиков и забирает себе все кубики, на которых выпали шестёрки. Затем второй бросает оставшиеся кубики и тоже забирает себе все кубики, на которых выпали шестёрки. После этого вновь вступает в игру первый и т. д., пока не кончатся кубики. Выигрывает тот, кто забрал больше кубиков.
 - (a) Найдите среднее количество кубиков, набранных первым игроком.
 - (b) Найдите вероятность выигрыша первого при $n = 5$.
4. Пьяница стоит в шаге от обрыва. Каждую секунду он делает либо шаг в сторону обрыва, либо шаг от него, причём направление движения каждый раз выбирает случайно (с вероятностью $\frac{1}{2}$). Найдите вероятность того, что пьяница когда-нибудь упадёт в обрыв.
5. Пьяница немного протрезвел и теперь делает шаг в сторону обрыва с вероятностью $\frac{1}{3}$ и шаг от него с вероятностью $\frac{2}{3}$. Найдите вероятность того, что пьяница когда-нибудь упадёт в обрыв, если он стоит в 10 шагах от него.
6. Пьяница не упал с обрыва и решил пойти домой. Подойдя к двери, он обнаружил в кармане связку из 10 ключей. К замку подходит ровно один из них. Каждую минуту пьяница случайным образом (с вероятностью $\frac{1}{10}$) выбирает один из ключей и пытается открыть им дверь. Найдите математическое ожидание времени проникновения домой.
7.
 - (a) В вашем распоряжении есть монетка, которая при подбрасывании с вероятностью $\frac{1}{2}$ падает решкой вверх, и с вероятностью $\frac{1}{2}$ — орлом. Подбрасывая монетку бесконечно много раз, сгенерируйте событие с вероятностью $\frac{1}{3}$.
 - (b) Найдите математическое ожидание числа бросков монеты.