Серия 3. Возвращение вероятности

Условная вероятность события A при условии события B (*события* — это подмножества вероятностного пространства) определяется формулой $\mathsf{P}(A|B) = \frac{\mathsf{P}(A\cap B)}{\mathsf{P}(B)}$. Два события (т. е. подмножества вероятностного пространства) A и B называются *независимыми*, если $\mathsf{P}(A\cap B) = \mathsf{P}(A)\cdot\mathsf{P}(B)$. События $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называются *независимыми в совокупности*, если для любого поднабора событий A_{i_1}, A_{i_2}, ..., A_{i_k} выполнено

$$\mathsf{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = \mathsf{P}(A_{i_1}) \cdot \mathsf{P}(A_{i_2}) \cdot \ldots \cdot \mathsf{P}(A_{i_k}).$$

1. Докажите **формулу полной вероятности**: если события $B_1, \ldots, B_n$ попарно не пересекаются и покрывают всё вероятностное пространство, а A — какое-то событие, то $\mathsf{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}(A|B_i) \cdot \mathsf{P}(B_i)$.

2. **(a)** Докажите **формулу Байеса**: $\mathsf{P}(A|B) = \frac{\mathsf{P}(A)}{\mathsf{P}(B)} \cdot \mathsf{P}(B|A)$.

(b) (**«Байесова ловушка»**) Одним утром Незнайка начал подозревать у себя синдром Мюнхгаузена, который встречается в мире лишь в 0.1% случаев. Доктор Пилюлькин провел над Незнайкой один тест, который оказался положительным. Известно, что вне зависимости от того, болен ли тестируемый, точность этого теста составляет 99%. Выясните, с какой вероятностью Незнайка действительно болен синдромом.

3. Мастер по броскам в кольцо Евгений собирается сделать 100 бросков. Первый раз он попал, а второй промазал. Вероятность очередной раз попасть в кольцо равна проценту попаданий при всех предыдущих бросках. Найдите вероятность того, что он попадёт ровно 50 раз.

4. В очереди затылок друг к другу выстроились n человек разного роста. Петя стоит перед ними и смотрит на очередь. Более высокие загораживают более низких, и тех не видно. Чему равно среднее значение числа людей, которых видно Пете?

5. На первом этаже семнадцатиэтажного здания в лифт вошли десять человек. Предполагая, что каждый из вошедших (независимо от остальных) может с равной вероятностью жить на любом из шестнадцати этажей (со 2-го по 17-й), найдите математическое ожидание числа остановок лифта.

6. При посадке в самолёт выстроилась очередь из 100 пассажиров, у каждого из которых имеется билет на одно из 100 мест. Первой в самолёт зашла сумасшедшая старушка и села на случайное место (возможно, и на своё). Далее пассажиры по очереди занимают свои места, а в случае, если свое место занято, садятся случайным образом на свободное место. Найдите вероятность того, что последний пассажир займёт своё место.

7. Вам принесли два конверта, в каждом из них лежит чек на некоторую сумму (суммы — различные натуральные числа). В вашем распоряжении есть монетка, которая при подбрасывании с вероятностью $1/2$ падает решкой вверх, и с вероятностью $1/2$ — орлом. Вам разрешается посмотреть содержимое одного конверта (на ваш выбор), и затем решить, какой конверт вы заберёте себе. Докажите, что существует алгоритм действий, который при любом распределении сумм в конвертах позволяет с вероятностью строго большей, чем $1/2$, выбрать конверт, в котором сумма больше.