

## Серия 2. Разнобой по алгебре и ТЧ

1. Дан квадратный трёхчлен  $f(x)$ . Известно, что многочлен  $f(f(x))$  имеет ровно три различных корня. Может ли многочлен  $f(f(f(x)))$  иметь семь различных корней?
2. Найдите все такие тройки натуральных чисел  $a, k, p$ , что  $p$  — простое и верно равенство  $a^p + 1 = p^k$ .
3. Пусть  $f(x) = ax^2 + bx + c$ . Может ли уравнение  $f(f(x)) = x$  иметь ровно три действительных корня?
4. Про различные действительные числа  $a$  и  $b$  известно, что при любом натуральном  $k$  число  $a^k - b^k$  — целое. Докажите, что  $a$  и  $b$  целые.
5. Через  $\sigma(n)$  обозначим сумму цифр числа  $n$ .
  - (а) Докажите, что найдётся бесконечно много  $n$  таких, что  $\sigma(3^{n+1}) \leq \sigma(3^n)$ .
  - (б) Докажите, что найдётся бесконечно много  $n$  таких, что  $\sigma(2^{n+1}) < \sigma(2^n)$ .
  - (в) Докажите, что  $\sigma(2^n) \rightarrow \infty$  при  $n \rightarrow \infty$ .
6. Количество рыб в пруду будем выражать действительным числом от 0 до 1 (0 — рыб нет, 1 — весь пруд в рыбах). Известно, что если в каком-то году количество рыб в пруду было  $x$ , то в следующем оно будет
  - (а)  $2x(1-x)$ ; (б)  $3x(1-x)$ ; (в)  $4x(1-x)$ .Местный рыбак Фёдор сказал, что в последний раз столько же рыб, сколько и в 2019 году, было в 2015 году. Могли ли его слова оказаться правдой?
7. Назовём натуральное число  $N$  *хорошим*, если найдутся такое простое  $p$  и целые неотрицательные  $a, b, c$ , что  $N = \frac{p^a - p^b}{p^c - 1}$ . Докажите, что бесконечно много натуральных чисел не являются хорошими.