

Серия 2. Разнобой по алгебре и ТЧ

1. Дан квадратный трёхчлен $f(x)$. Известно, что многочлен $f(f(x))$ имеет ровно три различных корня. Может ли многочлен $f(f(f(x)))$ иметь семь различных корней?
2. Найдите все такие тройки натуральных чисел a, k, p , что p — простое и верно равенство $a^p + 1 = p^k$.
3. Пусть $f(x) = ax^2 + bx + c$. Может ли уравнение $f(f(x)) = x$ иметь ровно три действительных корня?
4. Про различные действительные числа a и b известно, что при любом натуральном k число $a^k - b^k$ — целое. Докажите, что a и b целые.
5. Через $\sigma(n)$ обозначим сумму цифр числа n .
 - (a) Докажите, что найдётся бесконечно много n таких, что $\sigma(3^{n+1}) \leq \sigma(3^n)$.
 - (b) Докажите, что найдётся бесконечно много n таких, что $\sigma(2^{n+1}) < \sigma(2^n)$.
 - (c) Докажите, что $\sigma(2^n) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$.
6. Количество рыб в пруду будем выражать действительным числом от 0 до 1 (0 — рыб нет, 1 — весь пруд в рыбах). Известно, что если в каком-то году количество рыб в пруду было x , то в следующем оно будет
 - (a) $2x(1-x)$; (b) $3x(1-x)$; (c) $4x(1-x)$.Местный рыбак Фёдор сказал, что в последний раз столько же рыб, сколько и в 2019 году, было в 2015 году. Могли ли его слова оказаться правдой?
7. Назовём натуральное число N *хорошим*, если найдутся такое простое p и целые неотрицательные a, b, c , что $N = \frac{p^a - p^b}{p^c - 1}$. Докажите, что бесконечно много натуральных чисел не являются хорошими.