

Теория чисел

1. Пусть $S(n)$ — сумма цифр числа n . Зададим последовательность $a_{n+1} = S(a_n)$, $a_0 = 2^{1000000}$. Найдите a_6 .
2. Сколько простых чисел содержится в последовательности $101, 10101, 1010101, \dots$?
3. Докажите, что для любого многочлена P с целыми коэффициентами и для любого натурального k существует такое натуральное число n , что $P(1) + P(2) + \dots + P(n)$ делится на k .
4. Существует ли такое натуральное число, что, написав его рядом дважды, получится квадрат натурального числа?
5. Через $S(n)$ обозначим сумму цифр числа n . Докажите, что не существует натурального N такого, что для любого $n > N$ выполнялось бы неравенство $S(2^n) \leq S(2^{n+1})$.
6. Докажите, что для любого натурального числа n существует число, делящееся на n , состоящее только из нулей и единиц.
7. Пусть a, b, c, m — такие натуральные числа, что

$$a^2 + b^2 + c^2 + 1 = mabc.$$

Докажите, что $m = 4$.