Степень точки. Радикальные оси

Определение. *Степенью точки* P относительно окружности ω с радиусом r называется величина $d^2 - r^2$, где d — расстояние от точки P до центра окружности.

Утверждение 1. Пусть прямая, проходящая через точку P, пересекает окружность ω в точках A и B. Тогда степень точки P относительно окружности ω равна числу $PA \cdot PB$, если точка P лежит вне окружности ω, и числу $-PA \cdot PB$ — если внутри.

Утверждение 2. Пусть точка P лежит вне окружности ω и прямая PX касается окружности ω в точке X. Тогда степень точки P относительно окружности ω равна PX^2.

Утверждение 3. Пусть даны две неконцентрические окружности. Геометрическим местом точек, степени которых относительно этих окружностей равны, является прямая, перпендикулярная линии центров окружностей. Эта прямая называется *радикальной осью* этих двух окружностей.

Утверждение 4. Даны три окружности, центры которых не лежат на одной прямой. Для каждой пары из этих окружностей проведена радикальная ось. Эти радикальные оси пересекаются в одной точке. Эта точка называется *радикальным центром* данных окружностей.

1. К двум непересекающимся окружностям проведены все четыре общих касательных. Докажите, что середины этих касательных лежат на одной прямой.

2. На окружности ω_1 с диаметром AB взята точка C. Из точки C опущен перпендикуляр CH на диаметр AB. Проведена окружность ω_2 с центром в точке C и радиусом CH. Докажите, что общая хорда окружностей ω_1 и ω_2 делит отрезок CH пополам.

3. Пусть вписанная окружность треугольника ABC касается сторон AB, AC, BC в точках C_1, B_1 , A_1. Докажите, что средние линии треугольников A_1CB_1 и A_1BC_1 соответственно параллельные сторонам A_1B_1 и A_1C_1, а также серединный перпендикуляр к BC пересекаются в одной точке.

Подсказка. Точка — это маленькая окружность с радиусом 0.

4. Дана равнобокая трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC. Окружность ω проходит через точки A и D и пересекает отрезки AB и AC в точках P и Q соответственно. Обозначим через X и Y отражения точек P и Q относительно середин отрезков AB и AC соответственно. Докажите, что точки B, C, X, Y лежат на одной окружности.

5. Дана неравнобокая трапеция $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Произвольная окружность, проходящая через точки C и D, пересекает боковые стороны трапеции в точках P и Q, а диагонали — в точках M и N . Докажите, что прямые PQ, MN и AB пересекаются в одной точке.

6. В остроугольном треугольнике ABC проведена высота CC_1, продолжение медианы AM пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке N. Точка D плоскости такова, что $ABCD$ параллелограмм. Докажите, что A, C_1, N, D лежат на одной окружности.