

## Разнойбой-2

1. Уравнение  $ax^5 + bx + c = 0$  имеет ровно три различных корня ( $c \neq 0$ ). Докажите, что уравнение  $cx^5 + bx^4 + a = 0$  тоже имеет ровно три различных корня.
2. Положительные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab + bc + ac \geq a + b + c$ . Докажите, что  $a + b + c \geq 3$ .
3. Для вписанного четырехугольника выполнено равенство  $CD = AD + BC$ . Докажите, что точка пересечения биссектрис углов  $A$  и  $B$  лежит на прямой  $CD$ .
4. Петя и Вася играют в очень странные шашки на полоске  $1 \times n$ . Изначально в последних (самых правых) трёх клетках полоски стоит три фишки (по одной в клетке). За ход игрок берёт любую фишку и передвигает её налево в любую свободную клетку (ничего не мешает фишкам перепрыгивать друг друга). Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре, если Петя начинает первым?
5. В графе у любых двух смежных вершин ровно 5 общих смежных вершин. Докажите, что количество рёбер в этом графе делится на 3.
6. Дано 10 натуральных чисел. Докажите, что можно выбрать несколько из них так, чтобы сумма выбранных делилась на 10.
7. Дано натуральное число  $n > 2$ . Рассмотрим все покраски клеток доски  $n \times n$  в  $k$  цветов такие, что каждая клетка покрашена ровно в один цвет, и все  $k$  цветов встречаются. При каком наименьшем  $k$  в любой такой покраске найдутся четыре окрашенных в четыре разных цвета клетки, расположенные в пересечении двух строк и двух столбцов?
8. Найдите углы остроугольного треугольника  $ABC$ , если известно, что его биссектриса  $AD$  равна стороне  $AC$  и перпендикулярна отрезку  $OH$ , где  $O$  — центр описанной окружности,  $H$  — точка пересечения высот треугольника  $ABC$ .