Графы. Деревья

Определение. *Деревом* называется связный граф без циклов. *Висячей* вершиной в графе называется вершина степени 1.

Утверждение. В любом дереве с $n \geqslant 2$ вершинами есть как минимум две висячие вершины.

Утверждение. В любом дереве с n вершинами ровно $n-1$ ребро.

Определение. *Остовным деревом* графа называется *подграф*, содержащий все его вершины и являющийся деревом.

Утверждение. В любом связном графе можно выделить остовное дерево.

Утверждение. Если в связном графе с n вершинами $n-1$ ребро, то это дерево.

Утверждение. В любом связном графе с n вершинами не меньше $n-1$ ребер.

1. Докажите, что из любого связного графа можно убрать одну вершину вместе со всеми выходящими из неё рёбрами так, чтобы граф остался связным.

2. Куб $n \times n \times n$ разбит на кубики $1 \times 1 \times 1$. Какое минимальное количество граней 1×1 необходимо в нём убрать, чтобы из любой его части можно было пробраться наружу?

3. В стране 100 городов, некоторые из которых соединены авиалиниями. Известно, что от любого города можно долететь до любого другого (возможно, с пересадками). Докажите, что можно пролететь по всем городам, сделав при этом не более 196 перелётов.

4. Даны натуральные взаимно простые числа p и q. Вася не знает сколько человек придёт к нему на день рождения, либо p, либо q. На какое минимальное количество кусков (не обязательно равных) ему нужно заранее разрезать торт, чтобы он мог раздать торт поровну как на p человек, так и на q?

5. Петя поставил на доску 50×50 несколько фишек, в каждую клетку – не больше одной. Докажите, что Вася может поставить на свободные поля этой же доски не более 99 новых фишек (возможно, ни одной) так, чтобы по-прежнему в каждой клетке стояло не больше одной фишки, и в каждой строке и каждом столбце этой доски оказалось чётное количество фишек.

6. Все n вершин графа G занумерованы. Известно, что множество вершин графа можно разбить на пять (потенциально пустых) долей с условием, чтобы внутри этих долей не было рёбер, причём это можно сделать *единственным* с точностью до перестановки долей образом. Докажите, что в графе хотя бы $4n-10$ рёбер.

7. Дано дерево с n вершинами. В его вершинах расставлены числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$, а на каждом ребре записано произведение чисел, стоящих в концах этого ребра. Обозначим через S сумму чисел на всех рёбрах. Докажите, что $\sqrt{n-1}(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2) \geqslant 2S$.