

Графы. Связность

Определение. *Граф* задан, если задано множество его *вершин* и для любой пары различных вершин известно, связаны они *ребром* или нет. *Степенью* вершины называется количество выходящих из неё *рёбер*. Вершина называется *чётной*, если её степень чётна и *нечётной* — если её степень нечётна. Степень вершины v обозначается $\deg v$.

Утверждение. Количество *рёбер* в графе есть полусумма степеней всех его вершин.

Определение. *Путь* в графе называется последовательность *рёбер*, каждое следующее из которых начинается в конце предыдущего. *Циклом* в графе называется замкнутый путь, то есть такой, начало и конец которого совпадают.

Определение. Граф называется *связным*, если любые две его вершины могут быть соединены путём. Любой граф является объединением некоторых связных «кусков», каждый такой «кусок» называется *компонентой связности*.

1. В стране Семерка 15 городов, каждый из которых соединен дорогами не менее, чем с 7 другими. Докажите, что из любого города можно добраться до любого другого (возможно, проезжая через другие города).
2. В Тридевятом царстве лишь один вид транспорта – ковёр-самолёт. Из столицы выходит 21 ковролиния, из города Дальний – одна, а из всех остальных городов – по 20. Докажите, что из столицы можно долететь в Дальний (возможно, с пересадками).
3. Между некоторыми из $2n$ городов установлено воздушное сообщение, причём каждый город связан (беспосадочными рейсами) не менее чем с n другими. Докажите, что если отменить любые $n - 1$ рейсов, то всё равно из любого города можно добраться в любой другой на самолётах (с пересадками).
4. Столица страны соединена авиалиниями со 100 городами, а каждый город, кроме столицы, соединён авиалиниями ровно с 10 городами (если A соединён с B , то B соединён с A). Известно, что из любого города можно попасть в любой другой (может быть, с пересадками). Докажите, что можно закрыть половину авиалиний, идущих из столицы так, что возможность попасть из любого города в любой другой сохранится.
5. Гидры состоят из голов и шей (любая шея соединяет ровно две головы). Одним ударом меча можно снести все шеи, выходящие из какой-то головы A гидры. Но при этом из головы A мгновенно вырастает по одной шее во все головы, с которыми A не была соединена. Геракл побеждает гидру, если ему удастся разрубить её на две несвязанные шеями части. Найдите наименьшее N , при

котором Геракл сможет победить любую *стошею* гидру, нанеся не более, чем N ударов.

6. В стране 1001 город, любые два города соединены дорогой с односторонним движением (граф в котором на каждом ребре задано направление называется *ориентированным*). Из каждого города выходит ровно 500 дорог, в каждый город входит ровно 500 дорог. От страны отделилась независимая республика, в которую вошли 668 городов. Докажите, что из любого города этой республики можно доехать до любого другого её города, не выезжая за пределы республики.