Неравенства о средних

Неравенства о средних. При любом наборе положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ верны неравенства

$$\sqrt{\frac{a_1^2+\ldots+a_n^2}{n}} \geqslant \frac{a_1+\ldots+a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1\cdot\ldots\cdot a_n} \geqslant \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\ldots+\frac{1}{a_n}}\,.$$

Средние называются соответственно (слева направо): *квадратичное*, *арифметическое*, *геометрическое*, *гармоническое*.

Замечание. Во всех трёх неравенствах равенство достигается только тогда, когда все элементы набора равны между собой.

1. При положительных a, b, c докажите неравенства

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geqslant \frac{2}{a+b}+\frac{2}{b+c}+\frac{2}{a+c} \geqslant \frac{9}{a+b+c}\,.$$

2. При положительных a, b, c, d докажите неравенство

$$\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}+\frac{1}{d^3} \geqslant \frac{a+b+c+d}{abcd}\,.$$

3. Докажите, что $\sqrt{a+1}+\sqrt{2a-3}+\sqrt{50-3a} < 12$.

4. Положительные числа a, b, c таковы, что $abc = 1$. Докажите, что

$$a^2+b^2+c^2 \geqslant a+b+c\,.$$

5. При положительных a, b, c докажите, что $abc \geqslant (a+b-c)(b+c-a)(a+c-b)$.

6. При положительных x, y, z докажите неравенство

$$x^4+y^4+z^2 \geqslant \sqrt{8}\cdot xyz\,.$$

7. Положительные числа a, b, c, d таковы, что $2(a+b+c+d) \geqslant abcd$. Докажите, что

$$a^2+b^2+c^2+d^2 \geqslant abcd\,.$$

8. Положительные числа a, b, c таковы, что $abc = 1$. Найдите минимальное значение выражения $2a^3+3b^2+6c$.

9. При положительных a, b, c докажите неравенство

$$\frac{ab}{c^2}+\frac{bc}{a^2}+\frac{ac}{b^2} \geqslant \frac{\sqrt{ab}}{c}+\frac{\sqrt{bc}}{a}+\frac{\sqrt{ac}}{b}\,.$$