

Неравенства о средних

Неравенства о средних. При любом наборе положительных чисел a_1, a_2, \dots, a_n верны неравенства

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + \dots + a_n^2}{n}} \geq \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot \dots \cdot a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n}}.$$

Средние называются соответственно (слева направо): *квадратичное, арифметическое, геометрическое, гармоническое*.

Замечание. Во всех трёх неравенствах равенство достигается только тогда, когда все элементы набора равны между собой.

1. При положительных a, b, c докажите неравенства

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{2}{a+b} + \frac{2}{b+c} + \frac{2}{a+c} \geq \frac{9}{a+b+c}.$$

2. При положительных a, b, c, d докажите неравенство

$$\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} + \frac{1}{d^3} \geq \frac{a+b+c+d}{abcd}.$$

3. Докажите, что $\sqrt{a+1} + \sqrt{2a-3} + \sqrt{50-3a} < 12$.

4. Положительные числа a, b, c таковы, что $abc = 1$. Докажите, что

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq a + b + c.$$

5. При положительных a, b, c докажите, что $abc \geq (a+b-c)(b+c-a)(a+c-b)$.

6. При положительных x, y, z докажите неравенство

$$x^4 + y^4 + z^4 \geq \sqrt{8} \cdot xyz.$$

7. Положительные числа a, b, c, d таковы, что $2(a+b+c+d) \geq abcd$. Докажите, что

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq abcd.$$

8. Положительные числа a, b, c таковы, что $abc = 1$. Найдите минимальное значение выражения $2a^3 + 3b^2 + 6c$.

9. При положительных a, b, c докажите неравенство

$$\frac{ab}{c^2} + \frac{bc}{a^2} + \frac{ac}{b^2} \geq \frac{\sqrt{ab}}{c} + \frac{\sqrt{bc}}{a} + \frac{\sqrt{ac}}{b}.$$