

Ортоцентр

В задачах листика (кроме 6-й) треугольник ABC — остроугольный и неравобедренный; AA_1 , BB_1 , CC_1 — его высоты, H — ортоцентр (точка пересечения высот AA_1 , BB_1 , CC_1), O — центр описанной окружности треугольника ABC .

1. Докажите, что H является точкой пересечения биссектрис треугольника $A_1B_1C_1$.
2. (а) Докажите, что $\angle CAO = \angle BAH$.
(б) Докажите, что $OA \perp B_1C_1$.
3. (а) Докажите, что точка, симметричная точке H относительно стороны треугольника ABC , лежит на описанной окружности этого треугольника.
(б) Докажите, что точка X , симметричная точке H относительно середины стороны BC , лежит на описанной окружности треугольника ABC , причём отрезок AX является её диаметром.
4. Докажите, что расстояние от точки O до стороны BC вдвое меньше длины отрезка AH .
5. Окружность, описанная вокруг треугольника AB_1C_1 , вторично пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке K . Докажите, что прямая KH делит сторону BC пополам.
6. Точки K , L , M , N — середины сторон AB , BC , CD , AD соответственно вписанного четырёхугольника $ABCD$. Докажите, что ортоцентры треугольников AKN , BKL , CML и DMN образуют параллелограмм.
7. Прямые AO и BC пересекаются в точке Q , а отрезки AH и B_1C_1 — в точке P . Точка M — середина BC . Докажите, что $HM \parallel PQ$.