Разнобой

1. При любых действительных a, b, c докажите неравенство

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geqslant abc(a + b + c)\,.$$

2. На доске 8×8 отмечено 16 клеток, причём в каждой строке и в каждом столбце отмечено ровно по две клетки. Докажите, что в отмеченные клетки можно поставить 8 чёрных и 8 белых ладей так, чтобы в каждой строке и в каждом столбце стояла одна чёрная ладья и одна белая ладья.

3. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1, CC_1. Докажите, что точка, симметричная точке A_1 относительно стороны AB, лежит на прямой B_1C_1.

4. В таблицу 101×101 поставлена 101 ладья, причём ладьи не бьют друг друга. Каждая ладья сделала ход конём. Могла ли получиться расстановка ладей, вновь не бьющих друг друга?

5. В параллелограмме $ABCD$ диагональ AC длиннее диагонали BD. На диагонали AC отмечена такая точка M, что четырёхугольник $MBCD$ — вписанный. Докажите, что BD является общей касательной окружностей, описанных вокруг треугольников ABM и AMD.

6. Мишень «бегущий кабан» находится в одном из 100 окошек, расположенных в ряд. Окошки закрыты занавесками так, что для стрелка мишень все время остается невидимой. Чтобы поразить мишень, достаточно выстрелить в окошко, в котором она в момент выстрела находится. Если мишень не была поражена, то сразу после выстрела она обязательно перемещается в какое-то соседнее окошко. Постройте алгоритм, по которому надо стрелять, чтобы наверняка поразить мишень.

7. Докажите, что любое *целое* число можно представить в виде суммы пяти кубов *целых* чисел.

8.$^+$ Пусть $f(x) = x^3 - x$, $g(x) = x^3 - 3x^2 + 1$. Докажите, что при любых действительных α и β, сумма которых не равна 0, многочлен $\alpha f(x) + \beta g(x)$ имеет три различных действительных корня.