

Разнойбой

1. Существует ли невыпуклый пятиугольник, никакие две из пяти диагоналей которого не имеют общих точек (кроме вершин)?
2. Про положительные числа a, b, c известно, что

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq a + b + c.$$

Докажите, что $a + b + c \geq 3abc$.

3. В остроугольном треугольнике ABC точка I — центр вписанной окружности ω , I_A — центр внеписанной окружности ω_A , касающейся стороны BC и продолжений сторон AB и AC . Окружности ω и ω_A касаются стороны BC в точках L и L_A соответственно. Докажите, что прямые LI_A и L_AI пересекаются на высоте AH треугольника ABC .
4. На графике многочлена с целыми коэффициентами отмечены две точки с целыми координатами. Докажите, что если расстояние между ними — целое число, то соединяющий их отрезок параллелен оси абсцисс.
5. В углу шахматной доски размером $m \times n$ полей стоит ладья. Двое по очереди передвигают ее по вертикали или по горизонтали на любое число полей; при этом не разрешается, чтобы ладья стала на поле или прошла через поле, на котором она уже побывала (или через которое уже проходила). Проигрывает тот, кому некуда ходить. Кто из играющих может обеспечить себе победу: начинающий или его партнер, и как ему следует играть?
6. Четыре кузнечика сидят в вершинах квадрата. Каждую минуту один из них прыгает в точку, симметричную ему относительно другого кузнечика. Докажите, что кузнечики не могут в некоторый момент оказаться в вершинах квадрата большего размера.
7. Докажите, что плоскость нельзя покрыть 100 параболой со внутреннейостью. (Линия называется параболой, если существует прямоугольная система координат (x, y) , в которой эта линия представляется как $y = ax^2 + bx + c$, где $a > 0$).