Разнобой

1. Из точки O выходит несколько лучей. Угол между любыми двумя меньше $120°$. Докажите, что найдутся два луча такие, что все остальные содержатся в угле между ними.

2. Даны натуральные числа $a_1, a_2, \ldots, a_7$. Докажите, что можно выбрать некоторые из них (хотя бы одно), и взять часть выбранных чисел с плюсом, а часть с минусом так, чтобы в сумме получилось число, делящееся на 100.

3. Решите в целых числах уравнение $1 + x + x^2 + x^3 = 2^y$.

4. Фигура «мамонт» бьет как слон (по диагоналям), но только в трех направлениях из четырех (отсутствующее направление может быть разным для разных мамонтов). Какое наибольшее число не бьющих друг друга мамонтов можно расставить на шахматной доске 8×8?

5. Существует ли такой выпуклый пятиугольник $ABCDE$, что все углы ABD, BCE, CDA, DEB и EAC — тупые?

6. Дан ряд из 10^6 лампочек, все из которых изначально выключены. Каждый из 2018 человек по очереди подходит к этому ряду и переключает (то есть, выключенные включает, а включённые выключает) какие-то 2019 подряд идущих лампочек. В итоге оказалось, что ровно k лампочек включены. Докажите, что среди любых 2019 подряд идущих лампочек не более, чем $\frac{k}{2}$ лампочек включены.

7. Дано простое p. Докажите, что существует перестановка $(a_1,\, a_2,\, \ldots,\, a_p)$ чисел $1, 2, 3, \ldots, p$ такая, что числа a_1, a_1a_2, $a_1a_2a_3$, $\ldots$, $a_1a_2\,\ldots a_p$ дают разные остатки при делении на p.

8. В канун рождества 100 рыцарей собрались за круглым столом. Наутро каждый помнил, рядом с кем он сидел, но не помнил, кто из соседей был справа, а кто слева. Мерлин хочет рассадить их так, чтобы каждый из них снова оказался рядом со своими вчерашними соседями. Какое минимальное число вопросов ему для этого нужно задать? (За один вопрос Мерлин узнает обоих соседей одного рыцаря.)