

Рациональное и не очень

— А потом они все написали на регионе, что у числа есть «иррациональная часть»!
 — Боже, прекрати, они всего лишь дети!

По мотивам региона 2019

Определение. Действительное число α называется *рациональным*, если оно представимо в виде $\frac{p}{q}$, где $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, и *иррациональным* в противном случае.

1. Докажите, что следующие числа иррациональны:

(a) $\sqrt{2}$; (b) $\sqrt{7 + 4\sqrt{2019}}$; (c) $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$; (d) $e = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}$;
 (e*) $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{7} + \sqrt{11} + \sqrt{13}$.

2. (a) Докажите, что любое рациональное число $\frac{p}{q}$ можно представить в виде бесконечной десятичной периодической дроби (возможно, с предпериодом).

(b) Докажите, что полученная десятичная дробь конечна тогда и только тогда, когда $q = 2^m 5^n$.

(c) Докажите, что если $(q, 10) = 1$, то предпериода нет.

3. Рационально ли число $0,1234567891011121314\dots$?

4. Докажите, что если число $a + b\sqrt{2}$, где a и b рациональны, является корнем многочлена с целыми коэффициентами, то и число $a - b\sqrt{2}$ является корнем этого многочлена.

5. Действительные числа x и y таковы, что для любых различных простых нечётных p и q число $x^p + y^q$ рационально. Докажите, что x и y — рациональные числа.

6. Алексей Вадимович и Юлий Васильевич по очереди выписывают цифры бесконечной десятичной дроби. Юлий Васильевич своим ходом приписывает в хвост любое конечное число цифр, Алексей Вадимович — одну. Если в итоге получится рациональное число, выигрывает Юлий Васильевич, иначе — Алексей Вадимович. Кто имеет выигрышную стратегию?

7. Докажите, что из арифметической прогрессии с первым членом a и разностью $d \neq 0$ можно выбрать подпоследовательность, являющуюся геометрической прогрессией, тогда и только тогда, когда отношение $\frac{a}{d}$ рационально.