

## Ты — дерево, твое место в саду

1. Докажите, что для любого набора чисел  $0 < d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$  такого, что  $d_1 + \dots + d_n = 2n - 2$ , найдется дерево, где степени вершин будут  $d_1, \dots, d_n$ .
2. А единственно ли дерево из предыдущей задачи?
3. Может ли у графа быть ровно два остовных дерева?
4. В группе каждый имеет знакомого. Докажите, что эту группу можно разбить на две так, чтобы каждый человек имел знакомого из другой группы.
5. В дереве все вершины были занумерованы числами от 1 до  $n$ . Нумерацию поменяли, но оказалось, что если вершины  $i$  и  $j$  смежны, то они и раньше были смежны. Докажите, что найдется либо вершина номер которой не изменился, либо ребро, у которого набор номеров концов остался таким же.
6. В графе есть остовное дерево с  $m$  висячими вершинами и остовное дерево с  $n$  висячими вершинами. Докажите, что для всякого  $k$  такого, что  $m < k < n$ , найдется остовное дерево с  $k$  висячими вершинами.
7. В стране  $n$  городов, между некоторыми есть дороги. Известно, что из каждого города можно попасть в каждый, причем из каждого города выходит не более  $d$  дорог. Докажите, что всю страну можно разделить на два региона так, что в каждом регионе можно будет из любого города попасть в любой и размер каждого региона будет не меньше  $\lfloor \frac{n-1}{d} \rfloor$ .
8. Имеется многоугольник с  $n$  вершинами. Докажите, что в нем найдется диагональ, лежащая целиком внутри него, такая, что после её проведения получаются многоугольники с не менее чем  $\frac{n}{3} - 1$  сторонами. (можно без доказательства пользоваться тем фактом, что в любом многоугольнике найдется диагональ, лежащая внутри)