Инвариант

Пример 1. На доске выписаны числа $1, 2, \ldots, 20$. Разрешается стереть любые два числа a и b и заменить их на число $a + b - 1$. Какое число останется на доске после 19 таких операций?

1. На столе стоят 16 стаканов. Из них 15 стаканов стоят правильно, а один перевёрнут донышком вверх. Разрешается одновременно переворачивать любые два стакана. Можно ли, повторяя эту операцию, поставить все стаканы правильно?

2. На табло горит число 1001. Каждую секунду какие-то две соседние цифры одновременно либо увеличиваются на 1, либо уменьшаются на 1 (если могут). Может ли на табло загореться число 2017?

3. **(a)** На доске 8×8 угловая клетка покрашена в чёрный цвет, остальные в белый. За ход разрешается перекрасить все клетки одной строки или одного столбца в противоположный цвет. Докажите, что такими операциями нельзя добиться того, чтобы все клетки стали белыми;
(b) Та же задача для доски 9×9.
(c) Теперь на доске 4×4 в чёрный цвет покрашена клетка, соседняя с угловой. И за ход теперь можно перекрасить все клетки или одной строки, или одного столбца, или любой диагонали (угловая клетка тоже является диагональю). Докажите, что и в этот раз не получится добиться того, чтобы все клетки стали белыми.

4. Круг разделен на 6 секторов, в каждом из которых лежит по фишке. За ход разрешается взять любые две фишки и передвинуть их в соседние сектора. Докажите, что такими операциями нельзя сдвинуть все фишки в один сектор.

5. На доске выписаны числа $1, 2, \ldots, 20$. Разрешается стереть любые два числа a и b и заменить их на число $a + b + ab$. Какое число останется на доске после 19 таких операций?

Полуинвариант

Пример 2. В парламенте у каждого не больше 3 врагов. Докажите, что парламент можно разделить на две палаты так, что у каждого парламентария в своей палате будет не более одного врага.

6. Таблица 15×15 заполнена плюсами и минусами. Разрешается выбрать любую строку или любой столбец и поменять все стоящие там знаки на противоположные. Докажите, что несколькими такими операциями можно добиться того, чтобы в каждой строке и в каждом столбце плюсов было больше, чем минусов.

7. На плоскости дано $2N$ точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой, N из них окрашены в красный цвет, остальные в синий. Докажите, что эти точки можно соединить N непересекающимися отрезками, каждый из которых будет соединять красную точку с синей.

8. По окружности расставлены n чисел. Если подряд стоят числа a, b, c, d, при этом $(a-d)(b-c) > 0$, то числа b и c разрешается поменять местами. Докажите, что через несколько шагов нам не удастся произвести ни одной такой перестановки.

9. В поле 10×10 девять клеточек заросло бурьяном. Каждый век бурьяном зарастают все пустые клетки, у которых было хотя бы две соседние по стороне заросшие бурьяном клетки. Докажите, что вся таблица зарости бурьяном не сможет никогда.