Многочлены

1. Существуют ли такие три квадратных трехчлена, что каждый из них имеет два различных корня, а сумма любых двух из них корней не имеет?

2. Квадратный трехчлен $f(x)$ имеет два различных корня. Оказалось, что для любых чисел a и b верно неравенство $f(a^2 + b^2) \geqslant f(2ab)$. Докажите, что хотя бы один из корней этого трехчлена — отрицательный.

3. Квадратный трехчлен $f(x) = ax^2 + bx + c$, не имеющий корней, таков, что коэффициент b рационален, а среди чисел c и $f(c)$ ровно одно иррационально. Может ли дискриминант трехчлена $f(x)$ быть рациональным?

Предыдущие три задачи будут разобраны сегодня.

4. Докажите, что график любого кубического четырехчлена имеет центр симметрии.

5. Даны три квадратных трехчлена $P(x)$, $Q(x)$ и $R(x)$ с положительными старшими коэффициентами, имеющие по два различных корня. Оказалось, что при подстановке корней трехчлена $R(x)$ в многочлен $P(x)+Q(x)$ получаются равные значения. Аналогично, при подстановке корней трехчлена $P(x)$ в многочлен $Q(x) + R(x)$ получаются равные значения, а также при подстановке корней трехчлена $Q(x)$ в многочлен $P(x) + R(x)$ получаются равные значения. Докажите, что три числа: сумма корней трехчлена $P(x)$, сумма корней трехчлена $Q(x)$ и сумма корней трехчлена $R(x)$ равны между собой.

6. Вася нарисовал на листе бумаги график многочлена 3-й степени, а потом выделил полосу, ограниченную двумя прямыми, параллельными Ox. В полосе оказались три куска графика. Докажите, что проекция одного из этих кусков на ось Ox равна сумме проекций двух других кусков.

7. Гриша записал на доске 100 чисел. Затем он увеличил каждое число на 1 и заметил, что произведение всех 100 чисел не изменилось. Он опять увеличил каждое число на 1, и снова произведение всех чисел не изменилось, и так далее. Всего Гриша повторил эту процедуру k раз, и все k раз произведение чисел не менялось. Найдите наибольшее возможное значение k.

8. Дан многочлен $P(x) = a_{2n}x^{2n} + a_{2n-1}x^{2n-1} + \ldots + a_1x + a_0$, у которого каждый коэффициент a_i принадлежит отрезку $[100, 101]$. При каком минимальном n у такого многочлена может найтись действительный корень?

9. Учитель собирается дать детям задачу следующего вида. Он сообщит им, что он задумал многочлен $P(x)$ степени 2017 с целыми коэффициентами, старший коэффициент которого равен 1. Затем он сообщит им k целых чисел $n_1, n_2, \ldots, n_k$, и отдельно сообщит значение выражения $P(n_1) \cdot P(n_2) \cdot \ldots \cdot P(n_k)$. По этим данным дети должны найти многочлен, который мог бы задумать учитель. При каком наименьшем k учитель сможет составить задачу такого вида так, чтобы многочлен, найденный детьми, обязательно совпал бы с задуманным?