Теорема Виета

Теорема Виета. Пусть многочлен $P(x)$ имеет вид $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ и $x_1, x_2, \ldots, x_n$ - его корни. Тогда выполняется следующее:

$$\begin{cases} -\frac{a_{n-1}}{a_n} = x_1 + x_2 + \ldots + x_n \\ \frac{a_{n-2}}{a_n} = x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n \\ \ldots \\ (-1)^n \frac{a_0}{a_n} = x_1 x_2 \ldots x_n \end{cases}$$

Теорема Виета для квадратного трехчлена.

1. а)Квадратный трехчлен $x^2 + ax + b$ имеет целые корни, по модулю большие 2. Докажите, что число $a + b + 1$ — составное.
   б) Многочлен $f(x) = x^2 + ax + b + 1$ с целыми коэффициентами имеет два натуральных корня. Докажите, что число $a^2 + b^2$ составное.

2. Квадратный трехчлен $f(x) = ax^2 + bx + c$ принимает в точках $\frac{1}{a}$ и c значения разных знаков. Докажите, что корни трехчлена $f(x)$ имеют разные знаки.

3. При каком значении параметра m сумма квадратов корней уравнения $x^2 + (2 - m)x - m + 2 = 0$ наименьшая?

4. Известно, что корни уравнения $x^2 + px + q = 0$ — целые числа, а p и q — простые числа. Найдите p и q.

5. Алёша написал на доске 5 целых чисел — коэффициенты и корни квадратного трёхчлена. Боря стёр одно из них. Остались числа 2, 3, 4, -5. Восстановите стёртое число.

6. Сто а)последовательных б) последовательных чётных чисел взяли в качестве коэффициентов a_k и b_k в 50 квадратных уравнениях вида $x^2 + a_k x + b_k = 0$. Могут ли все эти уравнения иметь целые корни?

   Теорема Виета не только для квадратного трехчлена.

7. Найти коэффициенты p и q уравнения $x^4 - 10x^3 + 37x^2 + px + q = 0$, если известно, что среди его корней имеются две пары равных между собой чисел.

8. Пусть a, b и c - три различных числа. Решите систему

$$\begin{cases} z + ay + a^2x + a^3 = 0 \\ z + by + b^2x + b^3 = 0 \\ z + cy + c^2x + c^3 = 0 \end{cases}$$

9. Даны три действительных числа: a, b и c. Известно, что $a + b + c > 0, ab + +bc + ca > 0, abc > 0$. Докажите, что $a > 0, b > 0$ и $c > 0$.

10. Известно, что
    а) $x + y = u + v$ и $x^2 + y^2 = u^2 + v^2$; Докажите, что при любом натуральном n выполнено равенство $x^n + y^n = u^n + v^n$.
    б) $x + y + z = u + v + t, x^2 + y^2 + z^2 = u^2 + v^2 + t^2, x^3 + y^3 + z^3 = u^3 + v^3 + t^3$. Докажите, что при любом натуральном n выполнено равенство $x^n + y^n + z^n = u^n + v^n + t^n$.

11. Найдите сумму всевозможных произведений четного количества дробей $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{100}$

Теорема Виета

Теорема Виета. Пусть многочлен $P(x)$ имеет вид $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ и $x_1, x_2, \ldots, x_n$ - его корни. Тогда выполняется следующее:

$$\begin{cases} -\frac{a_{n-1}}{a_n} = x_1 + x_2 + \ldots + x_n \\ \frac{a_{n-2}}{a_n} = x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n \\ \ldots \\ (-1)^n \frac{a_0}{a_n} = x_1 x_2 \ldots x_n \end{cases}$$

Теорема Виета для квадратного трехчлена.

1. а)Квадратный трехчлен $x^2 + ax + b$ имеет целые корни, по модулю большие 2. Докажите, что число $a + b + 1$ — составное.
   б) Многочлен $f(x) = x^2 + ax + b + 1$ с целыми коэффициентами имеет два натуральных корня. Докажите, что число $a^2 + b^2$ составное.

2. Квадратный трехчлен $f(x) = ax^2 + bx + c$ принимает в точках $\frac{1}{a}$ и c значения разных знаков. Докажите, что корни трехчлена $f(x)$ имеют разные знаки.

3. При каком значении параметра m сумма квадратов корней уравнения $x^2 + (2 - m)x - m + 2 = 0$ наименьшая?

4. Известно, что корни уравнения $x^2 + px + q = 0$ — целые числа, а p и q — простые числа. Найдите p и q.

5. Алёша написал на доске 5 целых чисел — коэффициенты и корни квадратного трёхчлена. Боря стёр одно из них. Остались числа 2, 3, 4, -5. Восстановите стёртое число.

6. Сто а)последовательных б) последовательных чётных чисел взяли в качестве коэффициентов a_k и b_k в 50 квадратных уравнениях вида $x^2 + a_k x + b_k = 0$. Могут ли все эти уравнения иметь целые корни?

   Теорема Виета не только для квадратного трехчлена.

7. Найти коэффициенты p и q уравнения $x^4 - 10x^3 + 37x^2 + px + q = 0$, если известно, что среди его корней имеются две пары равных между собой чисел.

8. Пусть a, b и c - три различных числа. Решите систему

$$\begin{cases} z + ay + a^2x + a^3 = 0 \\ z + by + b^2x + b^3 = 0 \\ z + cy + c^2x + c^3 = 0 \end{cases}$$

9. Даны три действительных числа: a, b и c. Известно, что $a + b + c > 0, ab + +bc + ca > 0, abc > 0$. Докажите, что $a > 0, b > 0$ и $c > 0$.

10. Известно, что
    а) $x + y = u + v$ и $x^2 + y^2 = u^2 + v^2$; Докажите, что при любом натуральном n выполнено равенство $x^n + y^n = u^n + v^n$.
    б) $x + y + z = u + v + t, x^2 + y^2 + z^2 = u^2 + v^2 + t^2, x^3 + y^3 + z^3 = u^3 + v^3 + t^3$. Докажите, что при любом натуральном n выполнено равенство $x^n + y^n + z^n = u^n + v^n + t^n$.

11. Найдите сумму всевозможных произведений четного количества дробей $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{100}$