

## Радикальная ось-2

0. Что является радикальной осью: а) двух точек; б) окружности и точки вне ее; в) окружности и точки на окружности?

0. Что такое радикальный центр трех точек, не лежащих на одной прямой?

*Точка- это окружность.*

1. Пусть  $AB$  и  $AC$  — касательные к окружности  $\omega$ , и пусть  $M, N$  — середины отрезков  $AB$  и  $AC$ . Пусть  $P$  — произвольная точка на прямой  $MN$ . Докажите, что  $PA = PD$ , где  $PD$  — касательная к  $\omega$ .

2. Из точки  $A$ , лежащей вне окружности  $\omega$  проведены касательные  $AB$  и  $AC$  ( $B, C \in \omega$ ). Обозначим за  $E$  и  $F$  — середины отрезков  $AB$  и  $AC$  соответственно. На прямой  $EF$  выбрана произвольная точка  $D$ , из которой к  $\omega$  проводятся касательные  $DP$  и  $DQ$  ( $P, Q \in \omega$ ). Прямая  $PQ$  пересекает прямую  $EF$  в точке  $M$ . Докажите, что  $\angle DAM = 90^\circ$ .

3. Дана окружность  $\omega$  и фиксированная точка  $A$  вне окружности. Через точку  $A$  проводится окружность  $\omega_1$ , которая касается окружности  $\omega$  в точке  $A_1$ . Касательные к  $\omega_1$  в точках  $A$  и  $A_1$  пересекаются в точке  $M$ . Докажите, что если рассматривать все такие окружности  $\omega_1$ , то получаемые таким образом точки  $M$  лежат на одной прямой. (т.е. когда меняется  $\omega_1$ , меняется точка  $A_1$  и соответственно изменяется положение точки  $M$ ).

4. Из точки  $A$  к данной окружности  $S$  проведены касательные  $AB$  и  $AC$ . На средней линии треугольника  $ABC$ , параллельной стороне  $BC$ , выбраны произвольные точки  $X$  и  $Y$ . Отрезки касательных из точек  $X$  и  $Y$  к окружности  $S$  пересеклись в точке  $Z$ . Докажите, что четырёхугольник  $AXZY$  — описанный.

5. В треугольнике  $ABC$  проведена вписанная окружность с центром  $I$ , которая касается сторон  $AB, BC$  и  $AC$  в точках  $C_0, A_0$  и  $B_0$  соответственно. Прямая  $BI$  пересекает  $A_0C_0$  в точке  $K$ . Докажите, что центр описанной окружности треугольника  $BKB_0$  лежит на прямой  $AC$ .

*Еще немного задач на радикальные оси и степени точек*

6. Дан шестиугольник  $ABCDEF$ , в котором  $AB = BC, CD = DE, EF = FA$ , а углы  $A$  и  $C$  — прямые. Докажите, что прямые  $FD$  и  $BE$  перпендикулярны.

7. Дан неравносторонний треугольник  $ABC$ , в котором  $\angle B = 135^\circ$ . Пусть  $M$  — середина отрезка  $AC$ . Точка  $O$  — центр окружности  $\Omega$ , описанной около треугольника  $ABC$ . Луч  $BM$  вторично пересекает окружность  $\Omega$  в точке  $D$ . Докажите, что центр окружности  $\Gamma$ , описанной около треугольника  $BOD$ , лежит на прямой  $AC$ .

8. Диагонали  $AC$  и  $BD$  вписанного четырехугольника  $ABCD$  пересекаются в точке  $P$ . Точка  $Q$  выбрана на отрезке  $BC$  так, что  $PQ \perp AC$ . Докажите, что прямая, проходящая через центры окружностей, описанных около треугольников  $APD$  и  $BQD$ , параллельна прямой  $AD$ .

### Домашнее задание

1. На окружности  $S$  с диаметром  $AB$  взята точка  $C$ , из точки  $C$  опущен перпендикуляр  $CH$  на прямую  $AB$ . Докажите, что общая хорда окружности  $S$  и окружности  $S_1$  с центром  $C$  и радиусом  $CH$  делит отрезок  $CH$  пополам.

## Радикальная ось-2

0. Что является радикальной осью: а) двух точек; б) окружности и точки вне ее; в) окружности и точки на окружности?

0. Что такое радикальный центр трех точек, не лежащих на одной прямой?

*Точка- это окружность.*

1. Пусть  $AB$  и  $AC$  — касательные к окружности  $\omega$ , и пусть  $M, N$  — середины отрезков  $AB$  и  $AC$ . Пусть  $P$  — произвольная точка на прямой  $MN$ . Докажите, что  $PA = PD$ , где  $PD$  — касательная к  $\omega$ .

2. Из точки  $A$ , лежащей вне окружности  $\omega$  проведены касательные  $AB$  и  $AC$  ( $B, C \in \omega$ ). Обозначим за  $E$  и  $F$  — середины отрезков  $AB$  и  $AC$  соответственно. На прямой  $EF$  выбрана произвольная точка  $D$ , из которой к  $\omega$  проводятся касательные  $DP$  и  $DQ$  ( $P, Q \in \omega$ ). Прямая  $PQ$  пересекает прямую  $EF$  в точке  $M$ . Докажите, что  $\angle DAM = 90^\circ$ .

3. Дана окружность  $\omega$  и фиксированная точка  $A$  вне окружности. Через точку  $A$  проводится окружность  $\omega_1$ , которая касается окружности  $\omega$  в точке  $A_1$ . Касательные к  $\omega_1$  в точках  $A$  и  $A_1$  пересекаются в точке  $M$ . Докажите, что если рассматривать все такие окружности  $\omega_1$ , то получаемые таким образом точки  $M$  лежат на одной прямой. (т.е. когда меняется  $\omega_1$ , меняется точка  $A_1$  и соответственно изменяется положение точки  $M$ ).

4. Из точки  $A$  к данной окружности  $S$  проведены касательные  $AB$  и  $AC$ . На средней линии треугольника  $ABC$ , параллельной стороне  $BC$ , выбраны произвольные точки  $X$  и  $Y$ . Отрезки касательных из точек  $X$  и  $Y$  к окружности  $S$  пересеклись в точке  $Z$ . Докажите, что четырёхугольник  $AXZY$  — описанный.

5. В треугольнике  $ABC$  проведена вписанная окружность с центром  $I$ , которая касается сторон  $AB, BC$  и  $AC$  в точках  $C_0, A_0$  и  $B_0$  соответственно. Прямая  $BI$  пересекает  $A_0C_0$  в точке  $K$ . Докажите, что центр описанной окружности треугольника  $BKB_0$  лежит на прямой  $AC$ .

*Еще немного задач на радикальные оси и степени точек*

6. Дан шестиугольник  $ABCDEF$ , в котором  $AB = BC, CD = DE, EF = FA$ , а углы  $A$  и  $C$  — прямые. Докажите, что прямые  $FD$  и  $BE$  перпендикулярны.

7. Дан неравносторонний треугольник  $ABC$ , в котором  $\angle B = 135^\circ$ . Пусть  $M$  — середина отрезка  $AC$ . Точка  $O$  — центр окружности  $\Omega$ , описанной около треугольника  $ABC$ . Луч  $BM$  вторично пересекает окружность  $\Omega$  в точке  $D$ . Докажите, что центр окружности  $\Gamma$ , описанной около треугольника  $BOD$ , лежит на прямой  $AC$ .

8. Диагонали  $AC$  и  $BD$  вписанного четырехугольника  $ABCD$  пересекаются в точке  $P$ . Точка  $Q$  выбрана на отрезке  $BC$  так, что  $PQ \perp AC$ . Докажите, что прямая, проходящая через центры окружностей, описанных около треугольников  $APD$  и  $BQD$ , параллельна прямой  $AD$ .

### Домашнее задание

1. На окружности  $S$  с диаметром  $AB$  взята точка  $C$ , из точки  $C$  опущен перпендикуляр  $CH$  на прямую  $AB$ . Докажите, что общая хорда окружности  $S$  и окружности  $S_1$  с центром  $C$  и радиусом  $CH$  делит отрезок  $CH$  пополам.