Радикальная ось

0. На плоскости даны окружность ω и точка P.
   а) Прямая проведенная через точку P, пересекает окружность в точках A и B. Докажите, что произведение $PA \cdot PB$ не зависит от выбора прямой. Эта величина, взятая со знаком плюс для точки P вне окружности и со знаком минус для точки P внутри окружности называется степенью точки P относительно окружности ω.
   б) Докажите, что степень точки P относительно окружности ω с центром в точке O и радиусом R равна $OP^2 - R^2$.
   в) Докажите, что для точки P, лежащей вне окружности ω, ее степень относительно ω равна квадрату длины касательной, проведенной из этой точки.
   г) На плоскости даны две неконцентрические окружности ω_1 и ω_2 . Докажите, что геометрическим местом точек, для которых степень относительно ω_1 равна степени относительно ω_2, является прямая, перпендикулярная линии центров этих окружностей.
   Эту прямую называют радикальной осью окружностей ω_1 и ω_2.

1. Докажите, что радикальная ось двух пересекающихся окружностей проходит через точки их пересечения.

2. Докажите, что середины четырех общих касательных к двум непересекающимся кругам лежат на одной прямой.

3. На плоскости даны три окружности, центры которых не лежат на одной прямой. Проведем радикальные оси для каждой пары этих окружностей. Докажите, что все три радикальные оси пересекаются в одной точке. Эту точку называют **радикальным центром** трех окружностей.

4. На плоскости даны три попарно пересекающиеся окружности. Через точки пересечения любых двух из них проведена прямая. Докажите, что эти три прямые пересекаются в одной точке или параллельны.

5. На двух сторонах треугольника как на диаметрах построены окружности. Докажите, что радикальная ось этих окружностей есть прямая, содержащая высоту треугольника, проведенную из общей вершины указанных сторон.

6. Дана неравнобокая трапеция $ABCD$ ($AB||CD$). Окружность, проходящая через точки A и B, пересекает боковые стороны трапеции в точках P и Q, а диагонали – в точках M и N. Докажите, что прямые PQ, MN и CD пересекаются в одной точке.

7. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается стороны AB в точке C'. Окружность, вписанная в треугольник ACC', касается сторон AB и AC в точках C_1, B_1; окружность, вписанная в треугольник BCC', касается сторон AB и BC в точках C_2, A_2. Докажите, что прямые B_1C_1, A_2C_2 и CC' пересекаются в одной точке.

8. На гипотенузе AB прямоугольного равнобедренного треугольника ABC выбрана произвольная точка M. Докажите, что общая хорда окружностей с центром C и радиусом CA и с центром M и радиусом MC проходит через середину AB.

9. На сторонах BC и AC треугольника ABC взяты точки A_1 и B_1 . Прямая l проходит через общие точки окружностей с диаметрами AA_1 и BB_1. Докажите, что прямая l проходит через ортоцентр (точку H пересечения высот треугольника ABC).

Радикальная ось

0. На плоскости даны окружность ω и точка P.
   а) Прямая проведенная через точку P, пересекает окружность в точках A и B. Докажите, что произведение $PA \cdot PB$ не зависит от выбора прямой. Эта величина, взятая со знаком плюс для точки P вне окружности и со знаком минус для точки P внутри окружности называется степенью точки P относительно окружности ω.
   б) Докажите, что степень точки P относительно окружности ω с центром в точке O и радиусом R равна $OP^2 - R^2$.
   в) Докажите, что для точки P, лежащей вне окружности ω, ее степень относительно ω равна квадрату длины касательной, проведенной из этой точки.
   г) На плоскости даны две неконцентрические окружности ω_1 и ω_2 . Докажите, что геометрическим местом точек, для которых степень относительно ω_1 равна степени относительно ω_2, является прямая, перпендикулярная линии центров этих окружностей.
   Эту прямую называют радикальной осью окружностей ω_1 и ω_2.

1. Докажите, что радикальная ось двух пересекающихся окружностей проходит через точки их пересечения.

2. Докажите, что середины четырех общих касательных к двум непересекающимся кругам лежат на одной прямой.

3. На плоскости даны три окружности, центры которых не лежат на одной прямой. Проведем радикальные оси для каждой пары этих окружностей. Докажите, что все три радикальные оси пересекаются в одной точке. Эту точку называют **радикальным центром** трех окружностей.

4. На плоскости даны три попарно пересекающиеся окружности. Через точки пересечения любых двух из них проведена прямая. Докажите, что эти три прямые пересекаются в одной точке или параллельны.

5. На двух сторонах треугольника как на диаметрах построены окружности. Докажите, что радикальная ось этих окружностей есть прямая, содержащая высоту треугольника, проведенную из общей вершины указанных сторон.

6. Дана неравнобокая трапеция $ABCD$ ($AB||CD$). Окружность, проходящая через точки A и B, пересекает боковые стороны трапеции в точках P и Q, а диагонали – в точках M и N. Докажите, что прямые PQ, MN и CD пересекаются в одной точке.

7. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается стороны AB в точке C'. Окружность, вписанная в треугольник ACC', касается сторон AB и AC в точках C_1, B_1; окружность, вписанная в треугольник BCC', касается сторон AB и BC в точках C_2, A_2. Докажите, что прямые B_1C_1, A_2C_2 и CC' пересекаются в одной точке.

8. На гипотенузе AB прямоугольного равнобедренного треугольника ABC выбрана произвольная точка M. Докажите, что общая хорда окружностей с центром C и радиусом CA и с центром M и радиусом MC проходит через середину AB.

9. На сторонах BC и AC треугольника ABC взяты точки A_1 и B_1 . Прямая l проходит через общие точки окружностей с диаметрами AA_1 и BB_1. Докажите, что прямая l проходит через ортоцентр (точку H пересечения высот треугольника ABC.