Полуинвариант-1

Пусть есть последовательность объектов, или процесс, в котором позиции последовательно сменяются. Полуинвариант – это связанное с позицией число, которое при разрешенных действиях все время растет или все время убывает (возможно, нестрого). Выбор полуинварианта зависит от цели. Если есть строгий полуинвариант, то позиция не может повториться (и, в частности, процесс не может зациклиться).

0. В одной стране все города подняли над ратушами флаги – белые либо черные. Каждый день жители узнают цвета флагов у соседей в радиусе 100 км. Один из городов, где у большинства соседей флаги другого цвета, меняет свой флаг на этот другой цвет. Докажите, что со временем смены цвета флагов прекратятся.

1. Сыщик гоняется за Шпионом по Архипелагу Ста Островов. Оба используют только маршрутные корабли, которые курсируют ежедневно между некоторыми островами. Каждый корабль отплывает утром и приплывает на остров назначения к вечеру без захода на другие острова. С пересадками можно добраться с любого острова на любой. Сыщик всегда знает, где сейчас Шпион, и поймает его, если окажется с ним на одном острове. Сыщик может плыть в любой день, Шпион не плавает по пятницам.
а) Как Сыщику поймать Шпиона?
б) Докажите, что в задаче Сыщик может поймать Шпиона не позднее, чем через два года.

2. На шахматной доске 100×100 коню разрешено ходить только в четырех направлениях: на 2 вверх и 1 влево, на 2 вверх и 1 вправо, на 2 вправо и 1 вверх, на 2 вправо и 1 вниз. Докажите, что с какой бы клетки он ни начал, удастся сделать лишь конечное число ходов.

3. В ряд слева направо стоят 10 коробок. В самой левой лежит 1 шарик, в следующей – 2, $\ldots$, в последней – 10. За один ход можно переложить любой шарик в любую коробку правее той, где он лежит.
а) Докажите, что рано или поздно ходы закончатся.
б) Какое наибольшее число ходов могло быть сделано?
в) На доске записано 100 чисел. За один ход можно выбрать 2 разных числа и заменить меньшее на большее. Докажите, что рано или поздно ходы закончатся.

4. На доске написаны 20 различных натуральных числа. За ход можно взять одно из крайних чисел (наибольшее или наименьшее) и заменить на среднее арифметическое, геометрическое или гармоническое его с каким-то другим из чисел (при условии, что это среднее – натурально, и все числа остаются различными). Докажите, что удастся сделать лишь конечное число ходов.

5. а) В клетках таблицы 99×99 расставлены плюсы и минусы. Если в каком-то прямоугольнике из не менее чем 100 клеток минусов больше чем плюсов, разрешается в этом прямоугольнике поменять все знаки на противоположные. Докажите, что через некоторое время в каждом таком прямоугольнике плюсов будет не меньше чем минусов.
б) В клетках таблицы 99×99 расставлены целые числа. Если в каком-то прямоугольнике из не менее чем 100 клеток сумма отрицательна, разрешается в этом прямоугольнике поменять знаки всех чисел на противоположные. Докажите, что через некоторое время сумма чисел в каждом таком прямоугольнике будет неотрицательной.
в) То же, что и в предыдущем пункте, но числа — действительные.

6. По кругу стоит 1000 фишек трёх цветов. Если оба соседа фишки одного цвета, а сама фишка – другого, то за ход её можно перекрасить в цвет соседей. Докажите, что можно будет сделать лишь конечное число таких ходов.

7. Есть 10 различных чисел (возможно, не целых). За одну операцию можно два не равных числа заменить на два равных с той же суммой.
а) Может ли один и тот же набор чисел возникнуть дважды?
б) Может ли процесс продолжаться бесконечно?

8. В колоде часть карт лежит рубашкой вниз. Время от времени Петя вынимает из колоды пачку из одной или нескольких подряд идущих карт, в которой верхняя и нижняя карты лежат рубашкой вниз, переворачивает всю пачку как одно целое и вставляет её в то же место колоды (если "пачка"состоит лишь из одной карты, то требуется только, чтобы она лежала рубашкой вниз). Докажите, что в конце концов все карты лягут рубашкой вверх, как бы ни действовал Петя.

9. В колоде 52 карты, по 13 каждой масти. Ваня вынимает из колоды по одной карте. Вынутые карты в колоду не возвращаются. Каждый раз перед тем, как вынуть карту, Ваня загадывает какую-нибудь масть. Докажите, что если Ваня каждый раз будет загадывать масть, карт которой в колоде осталось не меньше, чем карт любой другой масти, то загаданная масть совпадет с мастью вынутой карты не менее 13 раз.

Полуинвариант-2

Пусть есть последовательность объектов, или процесс, в котором позиции последовательно сменяются. Полуинвариант – это связанное с позицией число, которое при разрешенных действиях все время растет или все время убывает (возможно, нестрого). Выбор полуинварианта зависит от цели. Если есть строгий полуинвариант, то позиция не может повториться (и, в частности, процесс не может зациклиться).

1. В стране несколько городов, попарные расстояния между которыми различны. Путешественник отправился из города A в самый удаленный от него город B, оттуда — в самый удаленный от него город C, и т. д. Докажите, что если C не совпадает с A, то путешественник никогда не вернется в A.

2. В парламенте у каждого не более трех врагов. Докажите, что парламент можно разбить на две палаты так, что у каждого парламентария в его палате будет не более одного врага.

3. На плоскости дано 100 красных и 100 синих точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Докажите, что можно провести 100 непересекающихся отрезков с разноцветными концами.

4. У Деда Мороза было n сортов конфет, по k штук каждого сорта. Он распределил все конфеты как попало по k подаркам, в каждый – по n конфет, и раздал их k детям. Дети решили восстановить справедливость. Два ребёнка готовы передать друг другу по конфете, если каждый получает конфету сорта, которого у него нет. Всегда ли можно организовать серию обменов так, что у каждого окажутся конфеты всех сортов?

5. В каждой из n стран правит либо партия правых, либо партия левых. Каждый год в одной из стран может поменяться власть. Это может произойти в том случае, если в большинстве граничащих с ней стран правит не та партия, которая правит в этой стране. Докажите, что смены правительств не могут продолжаться бесконечно.

6. На квадратном поле 10×10 девять клеток 1×1 поросли бурьяном. После этого бурьян может распространиться на клетку, у которой не менее двух соседних клеток уже поросли бурьяном. Докажите, что тем не менее бурьян не сможет распространиться на все клетки.

7. На доске написаны 100 натуральных чисел. За ход можно либо заменить два числа на их сумму, либо разложить число в произведение двух меньших различных чисел и заменить его на эти два числа. Докажите, что рано или поздно на доске останется одно число.

8. Несколько ребят стоят по кругу. У каждого есть некоторое количество конфет. Сначала у каждого чётное количество конфет. По команде каждый передает половину своих конфет стоящему справа. Если после этого у кого-нибудь оказалось нечётное количество конфет, то ему извне добавляется одна конфета. Это повторяется много раз. Доказать, что настанет время, когда у всех будет поровну конфет.

9. На экране компьютера сгенерирована некоторая конечная последовательность нулей и единиц. С ней можно производить следующую операцию: набор цифр «10» заменять на набор цифр «0111». Может ли такой процесс замен продолжаться бесконечно или когда-нибудь он обязательно прекратится?