

Ортоцентр-2.

Листочек посвящен свойствам ортоцентра доказанным в предыдущем листике.

В этом листочке, если не оговорено иное, дан остроугольный треугольник ABC , его ортоцентр обозначен через H , центр описанной окружности ω — через O , проведены высоты AA_1, BB_1 и CC_1 , а середины сторон AB, BC и CA — точки C_0, A_0 и B_0 соответственно, R — радиус описанной около него окружности.

1. Найдите угол C треугольника ABC , если отрезок A_1B_1 а) равен R ; б) равен $\frac{1}{2}R$.
в) В каких пределах может меняться отношение $\frac{A_1B_1}{R}$?
2. В параллелограмме $ABCD$ из вершины тупого угла провели высоты AM и AN . Известно, что $AC = t$ и $MN = n$. Найдите расстояние от точки A до ортоцентра треугольника AMN .
3. Ортоцентр отразили относительно середин сторон AB, AC, BC треугольника ABC и получили C_2, B_2, A_2 соответственно. Найдите стороны треугольника $A_2B_2C_2$, если стороны треугольника ABC равны 5, 6, 7.
4. Точку C_1 отразили относительно сторон AC, BC и получили точки N, K соответственно. Докажите, что точки N и K лежат на прямой A_1B_1 .
5. В окружность с центром O вписан четырехугольник с перпендикулярными диагоналями. Доказать, что расстояние от точки O до стороны четырехугольника равно половине длины противоположной стороны.
6. Докажите, что три прямые, проходящие через вершины A, B, C треугольника ABC и перпендикулярные отрезкам B_1C_1, C_1A_1 и A_1B_1 соответственно, пересекаются в одной точке.
7. а) $ABCD$ — вписанный четырехугольник. H_C и H_D — ортоцентры треугольников ABD и ABC . Докажите, что $H_C H_D C D$ — параллелограмм.
б) Пусть дан треугольник ABC . Докажите, что треугольник с вершинами в точках пересечения высот треугольников $AB_1C_1, BA_1C_1, CA_1B_1$ равен треугольнику $A_1B_1C_1$.
8. Через точки A_1, B_1 и C_1 проводятся прямые, параллельные соответственно радиусам OA, OB и OC . Доказать, что эти прямые пересекаются в одной точке.
9. Точки P и Q выбраны так, что $BOAP$ и $COPQ$ — параллелограммы. Докажите, что $Q = H$.
10. Описанная окружность треугольника AB_1C_1 пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке K , отличной от A . Докажите, что прямая KH проходит через A_0 .
11. K — основание перпендикуляра, опущенного из точки H на касательную к описанной окружности треугольника ABC , проведённой в точке A . Докажите, что треугольник AA_0K равнобедренный.

Ортоцентр-2.

Листочек посвящен свойствам ортоцентра доказанным в предыдущем листике.

В этом листочке, если не оговорено иное, дан остроугольный треугольник ABC , его ортоцентр обозначен через H , центр описанной окружности ω — через O , проведены высоты AA_1, BB_1 и CC_1 , а середины сторон AB, BC и CA — точки C_0, A_0 и B_0 соответственно, R — радиус описанной около него окружности.

1. Найдите угол C треугольника ABC , если отрезок A_1B_1 а) равен R ; б) равен $\frac{1}{2}R$.
в) В каких пределах может меняться отношение $\frac{A_1B_1}{R}$?
2. В параллелограмме $ABCD$ из вершины тупого угла провели высоты AM и AN . Известно, что $AC = t$ и $MN = n$. Найдите расстояние от точки A до ортоцентра треугольника AMN .
3. Ортоцентр отразили относительно середин сторон AB, AC, BC треугольника ABC и получили C_2, B_2, A_2 соответственно. Найдите стороны треугольника $A_2B_2C_2$, если стороны треугольника ABC равны 5, 6, 7.
4. Точку C_1 отразили относительно сторон AC, BC и получили точки N, K соответственно. Докажите, что точки N и K лежат на прямой A_1B_1 .
5. В окружность с центром O вписан четырехугольник с перпендикулярными диагоналями. Доказать, что расстояние от точки O до стороны четырехугольника равно половине длины противоположной стороны.
6. Докажите, что три прямые, проходящие через вершины A, B, C треугольника ABC и перпендикулярные отрезкам B_1C_1, C_1A_1 и A_1B_1 соответственно, пересекаются в одной точке.
7. а) $ABCD$ — вписанный четырехугольник. H_C и H_D — ортоцентры треугольников ABD и ABC . Докажите, что $H_C H_D C D$ — параллелограмм.
б) Пусть дан треугольник ABC . Докажите, что треугольник с вершинами в точках пересечения высот треугольников $AB_1C_1, BA_1C_1, CA_1B_1$ равен треугольнику $A_1B_1C_1$.
8. Через точки A_1, B_1 и C_1 проводятся прямые, параллельные соответственно радиусам OA, OB и OC . Доказать, что эти прямые пересекаются в одной точке.
9. Точки P и Q выбраны так, что $BOAP$ и $COPQ$ — параллелограммы. Докажите, что $Q = H$.
10. Описанная окружность треугольника AB_1C_1 пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке K , отличной от A . Докажите, что прямая KH проходит через A_0 .
11. K — основание перпендикуляра, опущенного из точки H на касательную к описанной окружности треугольника ABC , проведённой в точке A . Докажите, что треугольник AA_0K равнобедренный.