Окружности. Счет дуг.

Определение. *На окружности ω с центром O отмечены точки A, B, C. Пусть BC — «меньшая» (т. е. не содержащая A) дуга BC окружности ω. Мерой дуги BC назовём величину центрального угла BOC (может быть больше 180^o); угол BAC называется вписанным углом, опирающимся на дугу BC.*

Теорема. *Мера вписанного в окружность угла равна половине меры дуги, на которую он опирается.*

1. Пусть M и N — середины «меньшей» и «большей» дуг BC описанной окружности треугольника ABC соответственно. Докажите, что
   а) AM — биссектриса угла BAC;
   б) AN — биссектриса внешнего угла BAC.

2. Невероятно полезная задача.
   а) Хорды AC и BD окружности пересекаются в точке S. Докажите, что угол ASB равен полусумме «меньших» дуг AB и CD.
   б) В этой же картинке лучи AB и DC пересекаются в точке P. Докажите, что угол APD равен полуразности «меньших» дуг AD и BC.

3. а)Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность, K — середина «меньшей» дуги AB, не содержащей точек C и D. Пусть P и Q — точки пересечения пар хорд CK и AB, DK и AB соответственно. Докажите, что четырёхугольник $CPQD$ — вписанный.
   б) На окружность в указанном порядке отмечены точки A, B, C, D. Пусть K, L, M, N — середины «меньших» (т. е. не содержащих других отмеченных точек) дуг AB, BC, CD, DA соответственно. Докажите, что $KM \perp LN$.

4. На окружности взяты точки A, C_1, B, A_1, C, B_1 в указанном порядке.
   а) Докажите, что если прямые AA_1, BB_1 и CC_1 являются биссектрисами углов треугольника ABC, то они являются высотами треугольника $A_1B_1C_1$.
   б) Докажите, что если прямые AA_1, BB_1 и CC_1 являются высотами треугольника ABC, то они являются биссектрисами углов треугольника $A_1B_1C_1$.

5. Внутри остроугольного треугольника ABC нашлась такая точка P, что $\angle BPC = \angle BAC + 60^o$,
   $\angle CPA = \angle CBA + 60^o, \angle APB = \angle ACB + 60^o$. Лучи AP, BP, CP продлили до пересечения с описанной окружностью треугольника ABC. Докажите, что полученные точки пересечения лежат в вершинах равностороннего треугольника.

6. Пусть D — отражение вершины A остроугольного треугольника ABC относительно BC. Отрезки BD, CD пересекают описанную окружность треугольника ABC в точках P и Q. Докажите, что AD — биссектриса угла PAQ.

7. Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках M и N. Окружность ω с центром в M пересекает ω_1 в точках A и C, ω_2 — в точках B и D. Известно, что N лежит вне ω. Докажите, что $\angle ANB = \angle DNC$.

8. В окружность вписан четырёхугольник $ABCD$. Лучи AB и DC пересекаются в точке P, лучи BC и AD — в точке Q. Биссектриса угла APD пересекает отрезки AD и BC в точках K и M; биссектриса угла AQB пересекает отрезки AB и CD в точках L и N. Докажите, что $KLMN$ — ромб.

Домашнее задание

1. Прямоугольный треугольник ABC с прямым углом A движется так, что его вершины B и C скользят по сторонам данного прямого угла(Треугольник ABC не меняется при движении $BC = a, CA = b, AB = c$). Докажите, что множеством точек A является отрезок и найдите его длину.

Окружности. Счет дуг.

Определение. *На окружности ω с центром O отмечены точки A, B, C. Пусть BC — «меньшая» (т. е. не содержащая A) дуга BC окружности ω. Мерой дуги BC назовём величину центрального угла BOC (может быть больше 180^o); угол BAC называется вписанным углом, опирающимся на дугу BC.*

Теорема. *Мера вписанного в окружность угла равна половине меры дуги, на которую он опирается.*

1. Пусть M и N — середины «меньшей» и «большей» дуг BC описанной окружности треугольника ABC соответственно. Докажите, что
   а) AM — биссектриса угла BAC;
   б) AN — биссектриса внешнего угла BAC.

2. Невероятно полезная задача.
   а) Хорды AC и BD окружности пересекаются в точке S. Докажите, что угол ASB равен полусумме «меньших» дуг AB и CD.
   б) В этой же картинке лучи AB и DC пересекаются в точке P. Докажите, что угол APD равен полуразности «меньших» дуг AD и BC.

3. а)Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность, K — середина «меньшей» дуги AB, не содержащей точек C и D. Пусть P и Q — точки пересечения пар хорд CK и AB, DK и AB соответственно. Докажите, что четырёхугольник $CPQD$ — вписанный.
   б) На окружность в указанном порядке отмечены точки A, B, C, D. Пусть K, L, M, N — середины «меньших» (т. е. не содержащих других отмеченных точек) дуг AB, BC, CD, DA соответственно. Докажите, что $KM \perp LN$.

4. На окружности взяты точки A, C_1, B, A_1, C, B_1 в указанном порядке.
   а) Докажите, что если прямые AA_1, BB_1 и CC_1 являются биссектрисами углов треугольника ABC, то они являются высотами треугольника $A_1B_1C_1$.
   б) Докажите, что если прямые AA_1, BB_1 и CC_1 являются высотами треугольника ABC, то они являются биссектрисами углов треугольника $A_1B_1C_1$.

5. Внутри остроугольного треугольника ABC нашлась такая точка P, что $\angle BPC = \angle BAC + 60^o$,
   $\angle CPA = \angle CBA + 60^o, \angle APB = \angle ACB + 60^o$. Лучи AP, BP, CP продлили до пересечения с описанной окружностью треугольника ABC. Докажите, что полученные точки пересечения лежат в вершинах равностороннего треугольника.

6. Пусть D — отражение вершины A остроугольного треугольника ABC относительно BC. Отрезки BD, CD пересекают описанную окружность треугольника ABC в точках P и Q. Докажите, что AD — биссектриса угла PAQ.

7. Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках M и N. Окружность ω с центром в M пересекает ω_1 в точках A и C, ω_2 — в точках B и D. Известно, что N лежит вне ω. Докажите, что $\angle ANB = \angle DNC$.

8. В окружность вписан четырёхугольник $ABCD$. Лучи AB и DC пересекаются в точке P, лучи BC и AD — в точке Q. Биссектриса угла APD пересекает отрезки AD и BC в точках K и M; биссектриса угла AQB пересекает отрезки AB и CD в точках L и N. Докажите, что $KLMN$ — ромб.

Домашнее задание

1. Прямоугольный треугольник ABC с прямым углом A движется так, что его вершины B и C скользят по сторонам данного прямого угла(Треугольник ABC не меняется при движении $BC = a, CA = b, AB = c$). Докажите, что множеством точек A является отрезок и найдите его длину.